

Niels Henrik Abel

di Antonino Giambò

1. Il Premio Nobel fu istituito nel 1901 per disposizione testamentaria di Alfred Nobel (1833-1896). Egli aveva accumulato ingenti ricchezze con la vendita di materiali esplosivi, soprattutto della dinamite da lui inventata, e per ripulirsi la coscienza dispose che la massima parte delle sue sostanze, circa il 94%, fosse utilizzata per un premio (in denaro) che doveva essere assegnato annualmente a personalità che si fossero distinte, con servizi resi all'umanità, nei seguenti 4 campi: Chimica, Fisica, Medicina, Letteratura, e infine per azioni finalizzate alla Pace. Ci sono stati, in realtà, alcuni anni in cui, per motivi diversi, il Premio non è stato assegnato in uno o più dei campi suddetti.

Dal 1969 è assegnato pure un Premio Nobel per l'Economia.

Non esiste un Premio Nobel per la Matematica.

Come mai? Una leggenda metropolitana racconta che ciò fu dovuto al fatto che il fondatore del premio era stato cornificato dalla moglie con un matematico. Questa è una clamorosa bugia poiché Alfred Nobel non era neppure sposato.

La versione più accreditata è che, a giudizio di chi ha istituito il Premio, la Matematica non fosse in grado di rendere servizi utili all'umanità perché troppo teorica, mentre venivano privilegiate le discipline "pratiche".

Insomma, il motivo vero per il quale non esiste un Premio Nobel per la Matematica non si conosce.

Per ovviare a questa situazione e aumentare il prestigio sociale della Matematica, il Governo Norvegese istituì nel 2001 un premio annuale anche per questa disciplina, affidando all'Accademia Norvegese delle Scienze e delle Lettere il compito di scegliere a chi attribuirlo. Il Premio sarebbe stato assegnato a partire dall'anno successivo, il 2002, in occasione del bicentenario della nascita di un giovane e sfortunato matematico norvegese, Niels Henrik Abel. Proprio in suo onore il premio fu denominato **Premio Abel**.

In realtà, il Premio fu conferito per la prima volta nel 2003.

Per la cronaca, questo Premio fu assegnato al matematico francese Jean-Pierre Serre (n. 15/09/1926) con la seguente motivazione: «*Per avere svolto un ruolo fondamentale nel dare una forma moderna a numerose branche della matematica, fra cui la topologia, la geometria algebrica e la teoria dei numeri*»

Fino ad oggi nessun matematico italiano ha avuto l'onore di ricevere questo Premio.

Ma chi fu questo matematico così importante perché una grande Nazione istituisse un premio in suo onore e gli dedicatesse anche una serie di francobolli, di cui uno in particolare nel bicentenario della sua nascita? Quali opere matematiche di rilievo ha compiuto? E perché lo diciamo giovane e sfortunato?

Fornire le risposte agli interrogativi suddetti è lo scopo di questo articolo.

Devo precisare che, pur essendo l'articolo indirizzato ai giovani liceali, tuttavia ci sono dei punti che potrebbero risultare di difficile comprensione per loro. Mi auguro che qualcuno di essi, magari dopo aver scelto un indirizzo universitario in cui la Matematica svolge un ruolo determinante, possa ritornare su questi punti.



Niels Henrik Abel

2. Negli anni a cavallo tra Settecento e Ottocento la Norvegia attraversava un periodo tormentato sul piano politico e tremendo sul piano economico. In tutta la Nazione i cittadini soffrivano letteralmente la fame.

In questo contesto, il 5 agosto 1802 nacque a Finnøy, un piccolo comune norvegese, Niels Henrik Abel. Il padre era un pastore luterano, che due anni dopo la nascita di Niels Henrik, fu trasferito a Gjerstad, un'altra cittadina della Norvegia. E qui fu seguito dalla moglie e dai suoi sei figli.

Niels ricevette a casa, a Gjerstad, la sua prima istruzione, sotto la guida del padre, ma all'età di 13 anni, nel 1815, fu iscritto alla Scuola Cattedrale di Christiania (l'attuale Oslo), scuola molto impegnativa.

A Christiania, Niels Henrik ebbe dapprima la sventura di imbattersi in un pessimo maestro, un insegnante manesco, violento, contraddistintosi per maltrattamenti nei confronti degli allievi. Le capacità di Niels Henrik non ebbero modo di manifestarsi. Quando però colui fu licenziato, a partire dal 1818, le cose cambiarono radicalmente con il nuovo maestro, Bernt Michael Holmboe (1795-1850), matematico non eccelso ma insegnante eccellente, capace di intuire le potenzialità dei suoi allievi. Fu una guida importante e un vero amico per Abel, del quale seppe apprezzare il notevole talento matematico e, per stimolarlo, lo avviò alla lettura e allo studio delle opere di alcuni grandi matematici, quali Newton, Eulero, Lagrange, Gauss. Opere che Abel, nonostante la giovane età, assorbiva con facilità.

La Matematica diventò per il giovane Abel una vera e propria passione ed egli la studiava con piacere, se non addirittura per divertimento.

«Durante queste letture Abel osservò che Eulero aveva dimostrato il *teorema del binomio* soltanto per potenze razionali, e così egli colmò la lacuna dando una dimostrazione valida per il caso generale» [2, pag. 587]. Ma non lo fece subito.

Nel 1820 il padre di Niels Henrik, dopo essere caduto politicamente in disgrazia, morì e il giovane, sulle cui spalle ricadde il peso della famiglia (egli era il secondo dei sei figli), si trovò in seria difficoltà. Per sbarcare il lunario si mise a dare lezioni private, trascurando così gli studi. Dovette anche accantonare il desiderio di iscriversi all'Università. Lo soccorse proprio Holmboe, il quale riuscì ad ottenere una colletta che permise a Niels Henrik l'iscrizione, nel 1821, all'Università di Christiania e soprattutto di mantenersi agli studi.

Conseguì il titolo di *Candidatus Philosophiae* con voti modesti riportati in tutte le materie, tranne che in Matematica e Fisica, dove ottenne il massimo dei voti. Non esisteva allora una laurea in Matematica.

Le sue prime ricerche lo videro impegnato nella risoluzione di un problema che da oltre 200 anni teneva in apprensione i matematici che si logorarono nella ricerca della sua soluzione: *risolvere per radicali un'equazione algebrica di 5° grado*. Abel dimostrò che una soluzione generale dell'equazione era impossibile, non esisteva cioè una formula che esprimesse per radicali le soluzioni dell'equazione. Egli pubblicò il lavoro nel 1824 a sue spese, e dovette essere un enorme sacrificio per lui.

Per la verità, la proprietà era già stata dimostrata dall'italiano Paolo Ruffini (1765-1822), ma i suoi meriti, per vicissitudini varie, sarebbero stati riconosciuti universalmente solo 70 anni dopo la sua morte. Per questo all'inizio i meriti della scoperta furono tutti per Abel. Ma oggi il teorema, il cui enunciato assicura che *un'equazione algebrica generale di grado superiore al quarto non è risolubile per radicali*, giustamente è chiamato *teorema di Ruffini-Abel*.

Abel si dedicò anche al problema di stabilire se e quando un'equazione di grado qualsiasi è risolubile per radicali o se non lo è. Non portò a termine l'opera, da una parte perché si dedicò ad un problema ritenuto al momento più importante, dall'altra perché non ne ebbe il tempo. Il compito sarebbe stato assolto poco dopo dal francese Évariste Galois (1811-1832).

Incoraggiato, comunque, dal suo primo grande risultato, Abel aspirava ad un viaggio nell'Europa continentale per incontrare quelli che all'epoca erano considerati i più grandi matematici. Ma non aveva i fondi necessari e né l'Università né il Governo Norvegese furono in grado di finanziarlo, a causa della crisi economica. Ottenne, nondimeno, un piccolo aiuto per recarsi a Copenaghen, dove nel 1825 incontrò alcuni matematici danesi, compreso quello che era ritenuto il maggiore rappresentante matematico della Danimarca, Carl Ferdinand Degen (1766-1825). Vi rimase alcune settimane.

Dopo il ritorno a Christiania, ottenuto finalmente un adeguato aiuto finanziario, con un contributo del suo amico Holmboe, ma anche con una borsa di studio del Governo Norvegese, dal 1825 al 1827 poté fare l'agognato viaggio nel continente europeo, che lo portò a visitare soprattutto Berlino e Parigi.

In Germania forse avrebbe avuto piacere di incontrare Gauss, che operava a Gottinga ed era considerato il "principe dei matematici", ma non lo fece, si rifiutò, memore del fatto che il grande matematico tedesco, al quale Abel aveva inviato il suo lavoro sulle equazioni, lo aveva snobbato. Si dice che Gauss abbia gettato nel cestino il lavoro del giovane norvegese, senza neppure averlo letto.

La visita a Berlino, comunque, non fu improduttiva, tutt'altro. Abel divenne infatti amico di un importante editore, l'ingegnere August Leopold Crelle (1780-1855), il quale avrebbe fondato proprio in quel periodo, nel 1826, una rivista interamente dedicata alla Matematica (era la prima del suo genere) dal titolo *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Rivista di Matematica pura e applicata*), più nota come *Crelle's Journal* (*Rivista di Crelle*). Abel, delle cui eccellenti qualità Crelle si rese subito conto, diventò il primo collaboratore della rivista e fin dal primo numero compaiono alcuni suoi lavori, sette per la precisione, compresa una rielaborazione più puntuale della sua dimostrazione dell'impossibilità di risolvere per radicali un'equazione di grado maggiore di quattro.

Crelle fu un aiuto prezioso per Abel, anche sul piano finanziario.

Dopo Berlino, dove soggiornò per circa sei mesi, fu per poco tempo anche a Praga, a Vienna, a Zurigo. Passò quindi a Parigi il 10 luglio del 1826.

Qui ebbe una cocente delusione. In parte, perché Cauchy ⁽¹⁾ e Legendre ⁽²⁾, coi quali ebbe un incontro, lo trattarono con supponenza e non si occuparono delle sue scoperte, ma soprattutto per un altro più grave motivo. Abel presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi uno dei suoi studi più importanti su quelli che sarebbero stati denominati "integrali abeliani". Ha per titolo: *Memoire sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendentes* (*Memoria su una proprietà notevole d'una classe molto estesa di funzioni trascendenti*). Il lavoro fu assegnato proprio a Cauchy per una relazione di merito, ma Cauchy si dimenticò del manoscritto e non presentò alcuna relazione. Abel non ne ebbe più notizia.

Intanto, non avendo più denaro, neanche per sopravvivere, Abel lasciò Parigi e, con l'aiuto dei soliti Holmboe e Crelle, ritornò a Berlino, dove rimase fino al mese di maggio del 1827, lavorando alla **teoria delle funzioni ellittiche**.

A maggio del 1827 fece ritorno a Christiania, deluso per non aver ottenuto, nonostante l'impegno del suo amico Crelle di fargliela ottenere, una cattedra universitaria a Berlino, cui aspirava fortemente, non solo per legittimo orgoglio ma soprattutto perché l'incarico gli avrebbe consentito di migliorare sensibilmente la sua condizione economica.

Sopravvisse con una piccola sovvenzione da parte dell'Università di Christiania e tenendo lezioni private. Non trascurò, comunque, i suoi studi sulle funzioni ellittiche.

La sua salute, già minata da qualche tempo dalla tubercolosi, peggiorava sempre più.

Nel dicembre del 1828, in occasione del Natale, decise di raggiungere la fidanzata che abitava nella cittadina di Froland, distante circa 270 km da Christiania. A causa del lungo viaggio (a quell'epoca si viaggiava a dorso di mulo o al più in carrozza) e del tempo inclemente, la sua salute peggiorò ulteriormente. Dopo alcuni mesi trascorsi a letto, assistito amorevolmente dalla sua fidanzata, morì a Froland il 6 aprile 1829. Non aveva ancora compiuto 27 anni.

Due giorni dopo, ironia della sorte, una lettera di Crelle gli annunciava che era stato nominato professore di Matematica all'Università di Berlino e aggiungeva: «*Non dovrai più preoccuparti per il futuro*».

Il suo affezionato amico e mentore, il professore Bernt Michael Holmboe, così scrisse nel necrologio [3, pag. 130]: «*La sua vita e la sua attività scientifica furono brevi; tuttavia, raggiunse importanti pietre miliari per la scienza. Tutti i suoi articoli portano l'impronta dell'ingegno più profondo, e dimostrano senza alcun dubbio che fu una delle menti matematiche più eminenti mai nate. Quelli che non si possono formare un*

¹ Augustin Louis Cauchy, 1789-1857.

² Adrien Marie Legendre, 1752-1833.

giudizio proprio leggendo e comprendendo i suoi lavori, si convinceranno della verità di questa affermazione per l'acclamazione che i più famosi matematici gli hanno concesso».

Di fatto, i riconoscimenti postumi, da parte del mondo accademico, si susseguirono subito con la rapidità del vento. A questo contribuirono non poco i numerosi articoli che Abel aveva pubblicato sulla rivista di Crelle. Il quale Crelle così scrisse sulla rivista stessa [3, pag. 129]: «*Tutti i lavori di Abel portano l'impronta di un ingegno e di una forza di pensiero che è insolita e spesso sorprendente, anche nel caso in cui la giovane età dell'autore non fosse presa in considerazione*».

Nel 1830, un anno dopo la morte di Abel, l'Accademia Nazionale delle Scienze di Parigi, anche per fare ammenda del pastrocchio di qualche anno prima, gli conferì, *ex aequo* con Jacobi⁽³⁾, il Gran Premio da essa bandito, con la motivazione che “entrambi avevano fatto scoperte importanti nel campo delle funzioni ellittiche”.

Ma i riconoscimenti che il mondo accademico tributò ad Abel si riscontrano anche nella denominazione di molti termini matematici che portano il suo nome: *gruppo* (e anche *anello* o *corpo*) *abeliano*, *integrale abeliano*, *funzione abeliana*, *varietà abeliana*, *equazione funzionale di Abel*, *trasformata di Abel*.

Di lui il matematico francese Charles Hermite (1822-1801) disse: «*Ha lasciato ai matematici di lavorare per cinquecento anni*». Lo disse riferendosi in particolare alla memoria che Abel presentò all'Accademia Francese e che fu perduta, ma della quale Jacobi aveva sentito parlare da Legendre, con il quale Abel era riuscito alla fine a mettersi in corrispondenza epistolare dopo il suo ritorno in Norvegia.

E, sempre a proposito di questo lavoro, così si esprime Hermite in una lettera del 14 marzo 1829, indirizzata proprio a Legendre, il quale, bisogna dirlo a suo onore, si era reso infine ben consapevole della qualità degli articoli di Abel [1, pag.327]: «*Che scoperta meravigliosa quella del sig. Abel! Non si è mai visto nulla di simile! Ma come mai questa scoperta, forse la più importante del secolo nel ramo della matematica e che è stata comunicata alla vostra Accademia già da due anni, è sfuggita all'attenzione dei vostri colleghi?*»

Sembra che il contenuto di questa lettera e soprattutto il parere di Hermite siano venute in qualche modo a conoscenza dei matematici norvegesi, i quali, benché Abel fosse già morto, hanno fatto pressione sul Governo affinché manifestasse la sua indignazione all'Accademia Francese per l'accaduto. Il risultato fu che il Console della Norvegia a Parigi fece istanza perché si ritrovasse il manoscritto. Questo ritrovamento avvenne di fatto nel 1840 e la Memoria di Abel fu ripresentata all'Accademia Francese e fu stampata nel 1841. La Memoria è passata alla storia come *Memoria di Parigi*.

I lavori di Abel erano sparpagliati in varie riviste, ma soprattutto nella rivista di Crelle. Con l'aiuto finanziario del Governo Norvegese e la supervisione di Holmboe, furono pubblicati in un'opera omnia in due volumi nel 1839 (figure 1-2). I due volumi contengono complessivamente una cinquantina di articoli. Tra i quali figurano quello che tratta della **teoria delle equazioni algebriche** con la scoperta del teorema cui abbiamo accennato e quello che si occupa della **teoria delle funzioni ellittiche** per la quale gli fu conferito il noto premio. Altri articoli si occupano di uno studio accurato e rigoroso della **convergenza delle serie di funzioni**, e di altro ancora⁽⁴⁾. E tutti gli articoli mostrano un matematico eccezionale, una delle menti più brillanti di tutti i tempi.

Dopo circa 30 anni la prima edizione dei lavori di Abel era praticamente introvabile sul mercato.

Fu stampata allora una *Nouvelle Édition* nel 1881, finanziata ancora dal Governo Norvegese. La cura e la supervisione della stampa furono affidate questa volta ai matematici norvegesi Ludwig Sylow (1832-1918) e Sophus Lie (1842-1899).

Entrambe le edizioni sono consultabili sulla piattaforma *Internet Archive* [4], dove sono state caricate delle copie digitali.

³ Carl Gustav Jacob Jacobi, matematico tedesco, 1804-1851.

⁴ Riguardo alla *Memoria di Parigi*, in questa edizione del 1839 compaiono solamente alcuni stralci nel cap. IX del tomo secondo. Holmboe negli *Avvertimenti introduttivi*, annota che parti della Memoria sono contenute in un'altra Memoria che Abel ha fatto pubblicare nel 1827, a Trondhjem, tra le Pubblicazioni della Società Reale Norvegese di Scienze e Lettere. La pubblicazione completa della Memoria figurerà nell'edizione del 1881, cap. VII del tomo I. Ad ogni modo, bisogna aggiungere che le traversie, per questa celebre Memoria, non finirono con la pubblicazione del 1841. Non ce ne occupiamo.

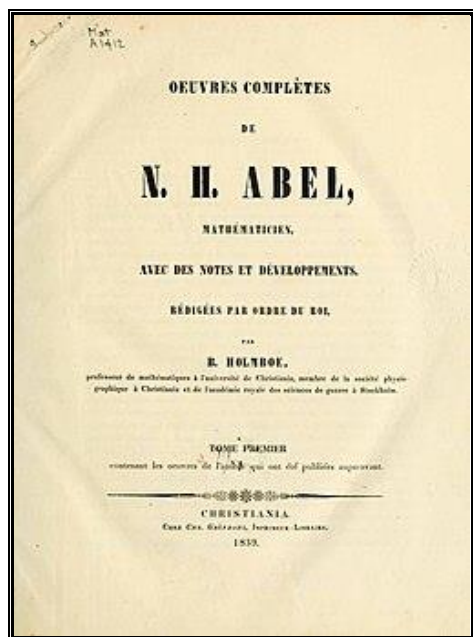


figura 1

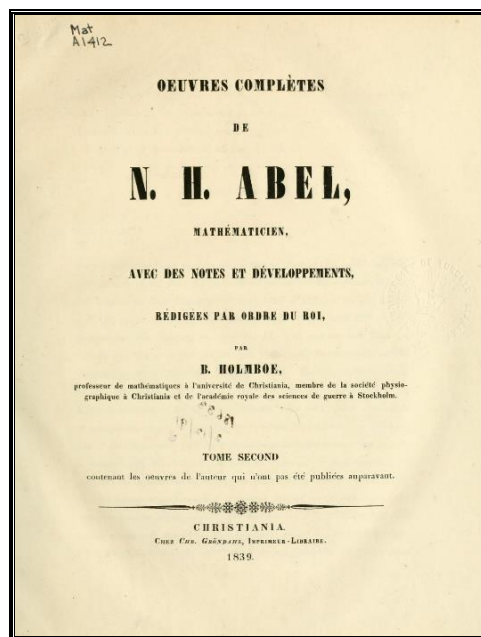


figura 2

In seguito i due volumi della *Nouvelle Édition* sono stati riprodotti in stampe molto curate ed eleganti e attualmente sono disponibili sul mercato editoriale (figura 3 – volume 1).

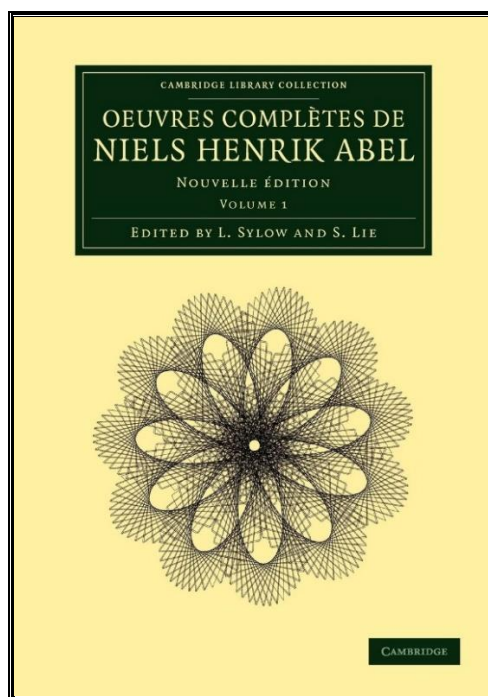


figura 3

3. Andiamo ad occuparci adesso di alcuni dei numerosi risultati ottenuti da Abel. Lo facciamo per sommi capi, per qualche cenno, poiché tutti i contributi di Abel alla Matematica presentano alti coefficienti di difficoltà e una loro trattazione a livello elementare non è possibile.

- Per prima cosa ci soffermiamo su un episodio particolarmente curioso. Abel, mentre frequentava il secondo anno alla Scuola Cattedrale di Christiania – non aveva ancora 21 anni – credette di aver trovato una formula in grado di risolvere per radicali un'equazione generale di quinto grado. Sottopose il lavoro ad Holmboe, il quale lo trasmise all'Università di Christiania per la pubblicazione. Per oltre 200 anni i matematici si erano affaticati inutilmente per risolvere la questione e i relatori incaricati del rapporto non si ritennero in grado

di esprimere un parere definitivo e inoltrarono il lavoro a Degen, in Danimarca. Questi, anch'egli piuttosto perplesso, chiese alcune spiegazioni ad Abel per potersi pronunciare. In particolare gli propose di fornire degli esempi. Fu la fortuna di Abel perché, proprio attraverso alcuni esempi, che non soddisfacevano alle condizioni che egli aveva stabilito, si rese conto di aver commesso un errore.

Bisogna aggiungere che fu proprio Degen a suggerire ad Abel di dedicare il suo impegno allo studio degli integrali ellittici, più gratificante, secondo lui, di uno studio sulle equazioni.

Abel, comunque, una volta accortosi dell'errore, cambiò strategia e, invece di cercare una formula risolutiva dell'equazione, sempre più convinto che una formula siffatta fosse impossibile, si dedicò alla dimostrazione appunto che tale formula non esiste. Le sue parole al riguardo ([4], tomo 2):

«Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle exist ou no, il faut demander si une telle relation est en effet possible».

(Abel si riferisce a situazioni generali, ma noi possiamo sostituire “relazione” con “soluzione”, e tradurre in questo modo: *Invece di cercare una soluzione che non si sa se esista o no, bisogna domandare piuttosto se tale soluzione in effetti è possibile*).

In poco tempo dimostrò che un'equazione generale di quinto grado non è risolubile per radicali e, come già detto, pubblicò a proprie spese il lavoro nel 1824. Perfezionò la dimostrazione in un nuovo articolo nel 1826.

Accenno brevemente al metodo da lui seguito.

Abel si serve di un procedimento per assurdo. Assume per ipotesi che esista una formula che fornisca, per radicali, le soluzioni di un'equazione generale di 5° grado, espresse per mezzo dei coefficienti dell'equazione. Mediante un'elaborata catena di deduzioni complicate, perviene ad un assurdo.

Conclude naturalmente che l'ipotesi assunta è falsa, ovvero non esiste una formula come quella ipotizzata.

- Abel aveva notato che il teorema del binomio era stato dimostrato dai matematici precedenti in modo rigoroso per i soli valori naturali dell'esponente. La formula dello sviluppo era quella di Newton:

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n.$$

Questa formula vale appunto per n numero naturale. Può, tuttavia essere generalizzata al binomio $(1 + x)^\alpha$, dove α è un numero reale, utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor⁽⁵⁾ di una funzione $f(x)$ in un intorno destro di 0. Questo è lo sviluppo:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Ora, se $f(x) = (1 + x)^\alpha$, una volta calcolate le derivate della funzione dei vari ordini nel punto 0, dopo aver sostituito nello sviluppo di Taylor, si trova:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

Eulero aveva obiettato che questo sviluppo è possibile se è possibile derivare quante volte si vuole la funzione x^α . Sennonché a quel tempo, la derivata di x^α si trovava utilizzando la formula del binomio. Si cadeva perciò in un circolo vizioso, per cui l'unica situazione in cui lo sviluppo del binomio era dimostrato correttamente, era che l'esponente fosse un numero naturale.

Ciò nondimeno lo sviluppo era utilizzato anche quando l'esponente era un numero reale.

Fu a questo punto che intervenne Abel. Egli notò tra le altre cose che, ammesso che la precedente formula dello sviluppo sia corretta, c'era tuttavia un problema. Precisamente, ricordando che la radice cubica di ogni numero positivo ha tre valori reali, nel caso in cui $\alpha=1/3$ il primo membro della formula, vale a dire la radice cubica del numero $1 + x$, ha per l'appunto tre valori, mentre il secondo membro ne ha uno solo. Bisognava trovare, pertanto, il modo di stabilire quale dei tre valori si doveva prendere.

Attraverso un ragionamento molto complesso Abel, non solo risolvette questa questione, ma giunse pure alla conclusione che è possibile dimostrare rigorosamente il teorema del binomio, ma sotto determinate condizioni, che egli stesso precisò.

⁵ Brook Taylor, matematico britannico, 1685-1731.

- Il problema della convergenza / divergenza di una serie interessò molto Abel, che manifestava forti e fondate perplessità su ciò che ai suoi tempi si faceva in proposito. Lasciamo a lui la parola [3, pag. 37]:

«Le serie divergenti sono l'invenzione del demonio ed è una vergogna basare su di esse una qualsiasi dimostrazione. Servendosene si può trarre a piacimento qualsiasi conclusione ed è questo il motivo per cui queste serie hanno prodotto tante fallacie e tanti paradossi».

Queste considerazioni erano espresse in una lettera indirizzata all'amico Holmboe nel 1826.

Per comprendere le perplessità di Abel, basta un esempio.

Consideriamo al riguardo l'identità seguente:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Essa è vera per ogni $x \neq 1$ se n è un numero naturale. Per verificarlo, basta controllare che si ha:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}.$$

Ma se si richiede che essa sia vera quando $n \rightarrow \infty$, per cui si avrebbe:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

e non si pongono le giuste condizioni, allora saltano fuori conclusioni strampalate.

Ecco dapprima un'analisi corretta della serie infinita:

- se è $-1 < x < 1$, la serie infinita è convergente e converge al valore $\frac{1}{1-x}$; questa serie è denominata *serie geometrica*;
- se $x \geq 1$, la serie infinita è la somma di infiniti valori positivi, per cui diverge a $+\infty$;
- se $x = -1$, la serie non si stabilizza, è indeterminata, assumendo ora il valore 0, ora il valore 1;
- se $x < -1$, la serie è indeterminata.

Tutto questo però non era affatto chiaro ai matematici tra la fine del Settecento e l'inizio dell'Ottocento, tant'è vero che i matematici di quel periodo, compreso il grande Eulero, eseguivano a volte operazioni su una serie infinita con regole che erano valide solo per le serie finite.

Per Eulero addirittura l'identità:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

vera solo se $-1 < x < 1$, era invece ritenuta vera comunque e, ponendo in essa $x = -1$, otteneva il seguente risultato assurdo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Abel così si esprimeva nella stessa lettera di cui sopra:

«Con l'eccezione delle serie geometriche, non esiste in tutta la matematica una sola serie infinita la cui somma sia stata determinata rigorosamente».

E, sempre nella stessa lettera, scriveva ancora:

«I fatti più importanti nella matematica si reggono senza fondamento. La maggior parte di essi sono corretti, ed è un fatto veramente sorprendente. Mi sto sforzando di trovare una base per essi. Un compito molto interessante».

Compito non solo interessante, ma arduo, che Abel comunque eseguì con bravura, spronato per l'appunto dall'uso spregiudicato che i matematici, Eulero compreso, facevano delle serie divergenti. Egli, infatti, contribuì in modo determinante a dare una base solida e rigorosa ai “fatti più importanti della matematica”, in particolare ad uno studio rigoroso sulla convergenza delle serie di funzioni.

Il lavoro di dare una base solida e rigorosa all'Analisi Matematica fu proseguito da Cauchy e completato dal praghese Bernhard Bolzano (1781-1848) e dal tedesco Karl Weierstrass (1815-1897)

- Come per gli altri casi presi in considerazione, non è possibile trattare a livello elementare neppure del lavoro che ottenne ad Abel, anche se postumo ed *ex aequo* con Jacobi, il premio dell'Accademia Francese, vale a dire lo studio sulle funzioni ellittiche.

Oggigiorno le funzioni ellittiche di Abel non sono neppure ricordate, mentre lo sono quelle di Jacobi. Ma la spiegazione è semplice, banale se si vuole: Jacobi, che visse altri 22 anni dopo la morte di Abel, ebbe tempo e modo di approfondire l'argomento e di farne interessanti applicazioni. Cosa che, invece, non poté fare Abel.

Proprio in relazione ad una proprietà particolare delle funzioni ellittiche prendo lo spunto per qualche considerazione che, a mio modesto parere, può essere interessante anche per uno studente liceale.

Le funzioni ellittiche sono concepite come una generalizzazione delle funzioni trigonometriche, ma, mentre una funzione trigonometrica è una funzione periodica con un solo periodo, che è un numero reale, una funzione ellittica è una funzione periodica con due periodi, che sono numeri complessi. Avevo ommesso di precisare che una funzione ellittica è una funzione di variabile complessa.

Qualche spiegazione non è inutile.

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ sono funzioni trigonometriche con un solo periodo: esso è il numero reale 2π nel caso delle prime due funzioni ed è π nel caso della terza. Si ha infatti:

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x, \quad \tan(x + k\pi) = \tan x,$$

dove k è un numero intero.

A titolo di curiosità, anche la funzione e^x , dove e è il numero di Nepero, è una funzione periodica con un solo periodo: esso è il numero immaginario $2\pi i$, essendo $i = \sqrt{-1}$ l'unità immaginaria.

Tenendo presente, infatti, la celebre relazione di Eulero, $e^{\pi i} = -1$, risulta:

$$e^{(x+k \cdot 2\pi i)} = e^x \cdot e^{2k\pi i} = e^x \cdot (e^{\pi i})^{2k} = e^x \cdot (-1)^{2k} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

dove k è un numero intero.

Orbene, se $f(z)$ è una funzione ellittica, per cui z è una variabile complessa, esistono due numeri complessi ω_1, ω_2 , linearmente indipendenti sul campo reale, per cui si ha:

$$f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z).$$

Se ω_1, ω_2 sono due periodi di una funzione $f(z)$ di variabile complessa, si dimostra che ogni loro combinazione lineare $m \omega_1 + n \omega_2$, con coefficienti interi m, n , è ancora un periodo della funzione, vale a dire che si ha:

$$f(z + m \omega_1 + n \omega_2) = f(z).$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Eric T. Bell, *I grandi matematici*, traduzione di Dina Aduni, Firenze, Biblioteca Sansoni, 1966.
- [2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, traduzione di Adriano Carugo, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.
- [3] José Maria Almira, *Lo sviluppo delle funzioni ellittiche – Galois*, traduzione di Vittoria Rinaldi, Milano, RBA Italia, 2017.
- [4] Internet Archive, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, prima e seconda edizione.

PENSIERINO FINALE.

*Exegi monumentum aere perennius
regalique situ pyramidum altius,
quod non imber edax, non Aquilo impotens
possit diruere aut innumerabilis
annorum series et fuga temporum.*

*Ho innalzato un monumento più duraturo del bronzo
e più elevato della mole regale delle piramidi,
che non la pioggia corrosiva, non l'Aquilone impetuoso
potrebbe distruggere o l'innumerevole
serie degli anni e la fuga dei tempi.*

[Orazio, poeta latino, 65-8 a.C., *Odi*]