L'ovvio che va dimostrato: L'infinità dei numeri composti.

Strategie didattiche per l'aritmetica, oltre il calcolo.

di Sergio Casiraghi

I numeri primi non finiscono mai,
anche i numeri composti.

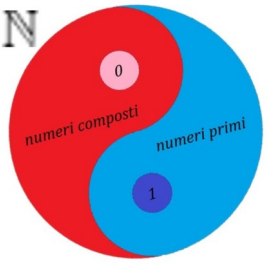
Ciò che gli studenti spesso pensano sia ovvio e inutile da dimostrare porta l'argomento ad essere un buon "strumento" per insegnare. L'infinità dei numeri composti rappresenta, non solo una necessaria nozione da trasmettere, ma un potente strumento didattico nell'insegnamento della matematica.
Seppure spesso messo in ombra da quella, più celebrata, dei numeri primi, l'insegnamento del fatto che (ovviamente) anche i numeri composti sono infiniti, offre prospettive uniche per comprendere l'importanza del saper dimostrare ciò che appare ovvio dalla struttura dei numeri naturali, toccando la fattorizzazione e il concetto stesso di infinito.

Le definizioni di "numero primo" e di "numero composto" risalgono alla *scuola pitagorica* (VI sec. a.C.) e nel libro VII degli Elementi di Euclide (III sec. a.C.) ritroviamo sia la definizione di **numero primo**, quello misurato soltanto dall'unità (def. XI), sia quella di **numero composto**, quello che è misurato da un qualche numero (def. XIII). Negli Elementi (libro IX, prop. 20) c'è la dimostrazione di uno dei teoremi più belli della matematica antica, l'**infinità dei numeri Primi**: *Esistono numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre*. Proposizione che oggi viene enunciata in questo modo: ***L'insieme dei numeri primi è infinito***. La trovate già ben dimostrata e presentata ad uso didattico nell'articolo "*Numeri primi e test di primalità*" di **Antonino Giambò** pubblicato su https://www.matmedia.it/numeri-primi-e-test-di-primalita

Suggestive (e fuorvianti) rappresentazioni visive

Per noi un **numero naturale** si dice **primo** se è maggiore di 1 e ha **soltanto** 2 divisori: 1 e se stesso. Se un numero naturale maggiore di 1 non è primo si dice **composto**. In base a queste definizioni, i numeri 0 e 1 non sono né primi né composti. Questo ci porta alla ripartizione dell'insieme $\mathbb{N}$ dei **numeri naturali** che trovano rappresentazioni figurate anche suggestive:

da quella artisticamente bella e filosoficamente interessante per la dualità Yin-Yang tra numero primo e composto, ma matematicamente imprecisa e anche didatticamente pericolosa per spiegare il concetto di cardinalità, in quanto uniforma l'idea di infinito con la densità, alla



rappresentazione a "liste parallele" più corretta ed efficace per dire che **hanno la stessa cardinalità**. Le frecce suggeriscono che per ogni numero naturale (1, 2, 3...) esiste un unico numero primo e un unico numero composto corrispondente. Un modo più rigoroso per dire che hanno uguale taglia infinita senza ingannare sulla densità: si vede chiaramente che i numeri sui nastri P e C crescono più velocemente di quelli su N, e anche in modo diverso tra loro. Non si crea la falsa illusione che siano "distribuiti equamente". Il simbolo dello Yin e Yang è perfetto per mostrare che, una volta tolti i casi speciali (0 e 1), i numeri naturali sono divisi in due categorie fondamentali e opposte: i **primi** e i **composti**. È corretto mostrare che 0 e 1 non rientrano nelle definizioni principali, sono "altro" rispetto alla *dicotomia primo/composto*, due facce della stessa medaglia, idea seppure suggestiva da usare quando si introducono metodi stocastici per stabilire l'eventuale primalità. Ma l'uguaglianza visiva, il fatto che l'area rossa e l'area blu siano identiche, può essere interpretato soltanto come metafora poetica del fatto che entrambi gli insiemi sono "infiniti allo stesso modo" (hanno la stessa cardinalità, $\aleph_0$). Per rappresentare visivamente che due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità, non bisogna usare le aree, ma il concetto di corrispondenza biunivoca (una "mappatura uno-a-uno"). Si può discutere il posizionamento problematico di 0 e 1, seppur colorati diversamente lo zero non è un numero composto (ha infiniti divisori, non un numero finito maggiore di 2, se ne può discutere).

Mettere l'1 nell'area blu (dei primi) è sbagliato. L'uno non è un numero primo (per definizione, un primo deve avere esattamente due divisori distinti: 1 e se stesso). L'1 ne ha solo uno. Quindi 0 e 1 dovrebbero essere in una zona neutra, esterna a entrambi i colori. Ma il problema principale è che il nostro cervello interpreta aree uguali come "quantità uguali" in senso intuitivo. È pur vero che la cardinalità è la stessa (infinito numerabile), ma è FALSO che i numeri primi e quelli composti siano "ugualmente numerosi" se li conti uno per uno. I **numeri composti** sono molto più frequenti, molto più "*densi*". Man mano che si procede sulla linea dei numeri, i primi diventano sempre più rari. Però l'immagine, suggerendo metà/metà, è fortemente fuorviante. A un principiante verrebbe da pensare che metà dei numeri siano primi, il che non è vero. Certo è che non possiamo dare intuizioni visive come dimostrazioni definitive. E da ciò riparte il ragionamento sull'**infinità dei numeri composti**. Si assume a livello intuitivo l'idea di **densità asintotica** (o **naturale**) che è un concetto della **teoria dei numeri** utilizzato per misurare quanto sia "grande" un sottoinsieme dei numeri naturali rispetto all'insieme dei numeri naturali stessi. A differenza della cardinalità, che per insiemi infiniti conta semplicemente "quanti" elementi ci sono (spesso equiparando tutti gli insiemi infiniti numerabili), la densità asintotica guarda piuttosto alla frequenza con cui gli elementi di un sottoinsieme appaiono all'interno di un intervallo naturale [1, n] quando n tende all'infinito.

Alcune dimostrazioni del Teorema: I numeri composti sono infiniti.

L'infinità dei numeri primi si può dare anche dimostrando che il numero di numeri composti non può essere un numero finito. Seguire questa via, se si constata che i numeri composti si presentano con maggior frequenza, sarà più semplice?
Ecco alcuni modi per dimostrarlo, dal più semplice e costruttivo al più formale (per assurdo).

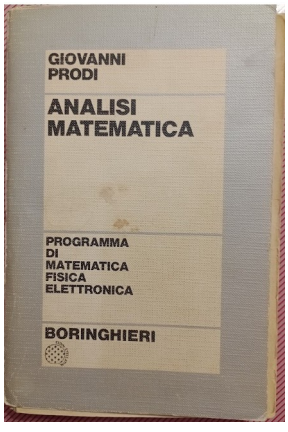
Metodo 1: La via Costruttiva Semplice (senza riferimenti all'infinità dei numeri primi)
Questo è l'approccio più diretto. Non c'è bisogno di sapere che i primi sono infiniti. Basta sapere che ne esiste almeno uno, ad esempio il 2.
Dimostrazione:Prendiamo il numero primo 2. Costruiamo una successione di numeri moltiplicando 2 per se stesso ripetutamente (le potenze di 2): 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, … Tutti i termini di questa successione: 4, 8, 16, 32, 64, … sono numeri composti, perché hanno tutti almeno tre divisori: 1, se stessi e 2. E sono infiniti, perché possiamo continuare a moltiplicare per 2 all'infinito ottenendo numeri sempre più grandi. Si è costruita una lista infinita di numeri composti distinti (la stessa cosa si ha prendendo tutti i numeri pari maggiori di 2: 4, 6, 8, 10... sono tutti composti e sono infiniti). **Dunque**, i numeri composti sono infiniti (c.v.d.).
Su quel "Dunque" ci sarebbe da lavorare. Testi ben noti, ne ricordo uno detto "*Prodino*" di Analisi Matematica, che però a volte lasciavano al lettore diverse dimostrazioni da svolgere. Per esempio, considerato l'insieme dei primi n numeri naturali I_n = {0, 1, 2,.., n-1} quel testo citato lasciava allo studioso (se ne aveva voglia) la dimostrazione che: Per ogni n>0, l'insieme I_n **non** si può porre in *corrispondenza biunivoca* con una sua parte propria. Ciò caratterizza gli **insiemi finiti** rispetto a quelli di cardinalità infinita come **N**, insieme di tutti i numeri naturali, preliminare distinzione per tuttte queste dimostrazioni.

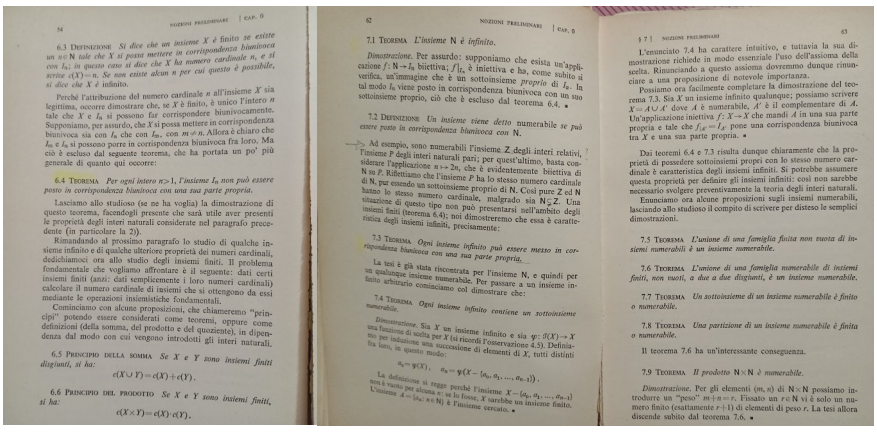
Metodo 2. Dimostrazione per inclusione (insiemistica) assimilabile al precedente
2 è l'unico numero primo Pari e poiché i **numeri pari** maggiori di 2 sono un sottoinsieme stretto di tutti i **numeri composti**, possiamo assicurare che anche i **numeri composti** sono senz'altro **infiniti**. Sappiamo che l'insieme dei numeri pari maggiori di 2 (E = {4, 6, 8, .. }) è un insieme infinito, sottoinsieme stretto dei numeri composti C = {4, 6, 8, 9, 10, .. }. Per un insieme che contiene un sottoinsieme infinito, l'insieme stesso deve essere infinito: è un'applicazione elegante del *principio di confronto tra cardinalità: poiché* |E_{>2}|=aleph_0 (l'infinito numerabile), è |C|=aleph_0. (c.v.d.)
Il bello del "sottoinsieme stretto" dei numeri Pari è che evidenzia come i **numeri composti** siano "molti di più" dei soli **pari**, dato che includono tutta la serie di composti dispari (9, 15, 21, ..).

Questo mette in evidenza come i numeri composti, sebbene abbiano la stessa cardinalità dei primi, non sono certo secondi ai primi, anzi raccolgono più numeri dei **numeri primi**.

Metodo 3: Usando l'infinità dei Primi (Costruttivo)
Se usiamo l'informazione che "i primi sono infiniti" come punto di partenza, possiamo darla così.
***Dimostrazione**:* Sappiamo che l'insieme dei numeri primi P è infinito, possiamo elencarli: p_1, p_2, p_3, p_4, ... (ovvero 2, 3, 5, 7, …). Prendiamo il primo numero di questa lista, p_1 = 2. Possiamo costruire una nuova lista moltiplicando ogni numero primo (dal secondo in poi) per 2: 2*p_2, 2*p_3, 2*p_4, … La lista che ne risulta è: 2*3, 2*5, 2*7, 2*11, ... (cioè 6, 10, 14, 22, ...)
Questi numeri sono tutti composti, perché sono il prodotto di due numeri primi diversi (quindi con divisori 1, se stessi, 2 e l'altro primo). Poiché la lista dei primi di partenza era infinita, anche questa nuova lista di prodotti sarà infinita. (c.v.d.)

Metodo 4: La via per Assurdo (Formale)
Questa è la dimostrazione logica che chiude ogni scappatoia.
Dimostrazione: Supponiamo (per assurdo) che l'insieme dei numeri composti C sia FINITO.
Se un insieme di numeri naturali è finito, deve esistere un numero massimo (il più grande di tutti). Chiamiamo C_m il più grande numero composto esistente. Questo significa che qualsiasi numero n che sia maggiore di C_m NON può essere composto. Se non è composto (ed è maggiore di 1), deve per forza essere un numero primo. In altre parole, la nostra ipotesi implica che da un certo punto in poi, tutti i numeri sono primi. E qui arriviamo alla contraddizione: ben sapendo che i numeri primi sono infiniti, allora esiste sicuramente un numero primo p che è molto più grande di C_m.
Consideriamo ora il numero X = p^2 (p al quadrato) e vediamo che X è composto, i suoi divisori sono 1, p, p^2. Inoltre, X > C_m, avendo scelto p > C_m, p^2 è (ovviamente) maggiore di p. Ma X è impossibile sia un numero composto maggiore del presunto "più grande numero composto" C_m. L'ipotesi iniziale dev'essere falsa. Dunque, l'insieme C dei numeri composti non può essere finito, dev'essere infinito (c.v.d.). Se usiamo il simbolo # per indicare il numero di elementi di un insieme, vale l'equazione insiemistica: $\infty = \#\mathbb{N}_{>1} = \#(P \cup C) = \#P + \#C$, $\#C < \infty$ con un principio fondamentale nella teoria degli insiemi: se un insieme infinito è l'unione di due sottoinsiemi, e uno di questi due è finito, allora l'altro sottoinsieme deve essere infinito. Quindi $\#P = \infty$ o $\#C = \infty$, da cui se $\#P = \infty$ abbiamo ricavato che $\#C = \infty$ e, del resto che il numero dei numeri primi sia infinito lo si ricava anche indipendentemente. Esistono diverse dimostrazioni dell'*infinità dei numeri primi* che si distaccano dalla *classica costruzione euclidea* (spesso percepita come dipendente dalla "negazione" dei numeri composti). Se cercate nei vari testi di analisi matematica le dimostrazioni sull'infinità dei numeri composti non le troverete, in effetti sembrano banali, al più vi trovate qualche piccolo mattoncino posto nei primi capitoli dei manuali universitari su cui si basa la ricerca vera e propria..

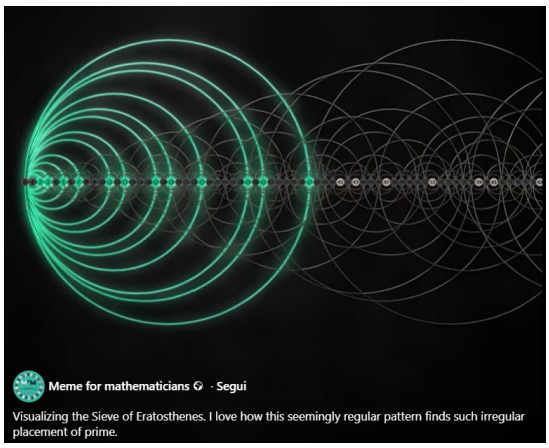




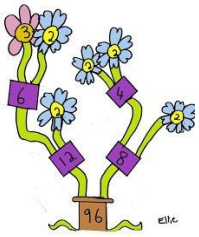
Non esiste un singolo matematico a cui sia attribuita la "scoperta" o la prima dimostrazione formale dell'**infinità dei numeri composti**. Sembra strano nel mondo della matematica, dove quasi ogni proposizione o teorema porta un nome, ma in questo caso c'è una ragione storica e logica precisa.

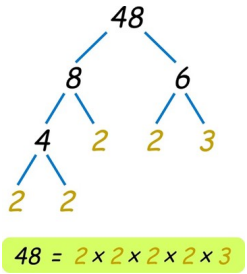
La paternità è invece reclamata per le più celebri e significative dimostrazioni del fatto che ∃∞#P! Al contrario, nelle dimostrazioni che ∃ ∞ **#C** un “padre” non c’è perché storicamente, il concetto di numero "composto" è una "definizione complementare", è l’ombra del concetto di numero "primo". Fin dall'antica Grecia (scuola Pitagorica, V secolo a.C.), quei matematici iniziarono a classificare i numeri in base alle loro specifiche proprietà: hanno identificato i numeri che non potevano essere divisi (i primi) e, per necessità logica, tutto ciò che rimaneva (escluso l'1) era "composto". Nel momento in cui si definivano i numeri naturali e l'operazione di moltiplicazione, l'esistenza di infiniti numeri composti diventava una conseguenza immediata della struttura stessa del sistema. Era evidente a chiunque maneggiasse quei concetti, il procedimento d’eliminazione degli “intrusi” rende tutto ciò esplicito proprio con l’uso dei vari setacci come il *Crivello di Eratostene*. L'infinità dei numeri composti è la diretta conseguenza del **Teorema Fondamentale dell'Aritmetica**, il quale afferma che *ogni numero naturale maggiore di 1 è primo o può essere decomposto in un prodotto unico di numeri primi*. I numeri composti sono "mattoni" costruiti moltiplicando quei numeri primi.

L’infinito di primi e composti nella didattica



L'insegnamento del fatto che sia i **numeri primi** sia i **numeri composti** sono **infiniti** offre prospettive uniche per comprendere la *struttura* dei **numeri naturali**, la *fattorizzazione* e lo stesso *concetto di infinito*. Si può utilizzare il **crivello** non solo per cerchiare i primi, ma per far notare la *densità dei numeri composti* (quelli barrati) in aumento man mano che procede il setaccio (https://www.facebook.com/reel/565991365978967).
Un'attività didattica efficace consiste nel mostrare che esistono delle sequenze di numeri composti consecutive arbitrariamente lunghe. Ad esempio, per trovare 100 numeri composti consecutivi, si può considerare la sequenza da 101!+2 a 101!+101. Questo dimostra che, sebbene i primi diventino più rari, i numeri composti formano "deserti" di numeri primi sempre più ampi (estesi e grandi). Anche far costruire rettangoli (array) con un numero fisso di mattoncini (es. 12) per mostrare che, se il numero è composto, si possono formare più rettangoli (2x6, 3x4, 4x3) evidenziando la fattorizzazione, è una **pratica didattica attiva** di visualizzazione e manipolazione. Oppure far rappresentare i numeri composti come dei **grafi ad albero** che "germogliano" per la scomposizione in fattori primi, mostrando visivamente la struttura interna del numero. È come se ogni numero portasse in sé la propria impronta genetica fatta di numeri primi. Le Regole di "*Germogliazione*": Si parte dal **tronco** scrivendo il numero composto in alto, poi si disegnano due rami verso l’alto/il basso, scrivendo due fattori (numeri che moltiplicati tra loro danno il numero da cui parte la biforcazione). Se un fattore è **composto**, si disegnano altri rami a partire da esso e si ha la crescita. Se un fattore è un **numero primo**, il ramo termina (si "cerchia" il numero come foglia). Quando tutte le estremità sono numeri primi, l'**albero** è completo. Si ottengono risultati tipo questi:





Vantaggi visivi: Rende immediato vedere da quali mattoni primi è composto un numero; anche a iniziare con coppie di fattori diverse (es. 36 come 6x6 o 4x9), l'albero finale conterrà sempre gli stessi numeri primi (foglie). Viene poi utilizzato per trovare il *Massimo Comune Divisore* (**MCD**) e il *minimo comune multiplo* (**mcm**).

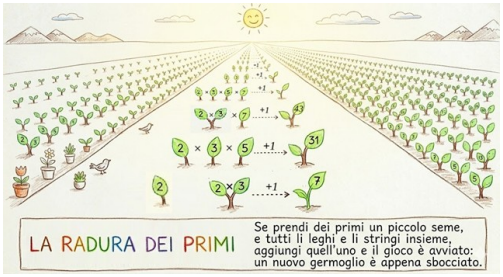
L'infinità dei **numeri composti** (e la difficoltà di fattorizzarli) è alla base della *crittografia* moderna (**RSA**), rendendo l'argomento concreto e interessante anche per gli studenti delle scuole superiori perché connesso alla realtà delle attività commerciali e di comunicazione odierne che toccano tutti.
Come ho cercato di rappresentare, è anche una via più facile di **concettualizzazione dell'Infinito**: mentre l'**infinità dei numeri primi** è spesso dimostrata per assurdo (Euclide), quella dei numeri composti è intuitivamente più accessibile: per ogni numero n, i suoi multipli (2*n, 3*n, ..) sono numeri composti, e poiché i multipli sono infiniti, lo sono anche i numeri composti. In sintesi, usare l'**infinità dei numeri composti** permette di passare dalla visione statica dei numeri a una dinamica, basata sulla costruzione (moltiplicazione) e la scomposizione (fattorizzazione).

Paternità dei teoremi sull'infinità di numeri primi e composti

Se proprio si deve indicare un "padre putativo" pensiamo a **Euclide** di Alessandria (circa 300 a.C.) e ai suoi "Elementi". In particolare, nel Libro VII degli Elementi, Euclide definisce formalmente cos'è un **numero primo** e cos'è un **numero composto**. Fornisce gli strumenti (la *teoria della divisibilità*) per capire come sono fatti i numeri. **Dimostra che i numeri primi sono infiniti** (*Proposizione 20 del Libro IX*). Sebbene Euclide non scriva mai esplicitamente una proposizione dal titolo "I numeri composti sono infiniti", il suo intero impianto logico lo rende ovvio. Se hai i mattoni (i primi) e puoi costruire muri all'infinito, avrai infiniti muri (i composti). Si può dire che l'**infinità dei numeri composti** è un *corollario* naturale della nascita dell'**aritmetica** stessa. Qui però bisogna stare attenti, abbiamo già detto che la dimostrazione dell'**infinità dei numeri Primi** è una di quelle più 'gettonate', si stima che esistano oltre **200 dimostrazioni** "distinte". Essendo il **Teorema** uno dei più antichi della storia, molte di queste dimostrazioni sono varianti di approcci classici, si possono però raggruppare in **50 "famiglie"** di tecniche radicalmente differenti tra loro.

Un tentativo di classificazione dei principali approcci alle dimostrazioni in ordine cronologico
Intrecciamo nel breve elenco le dimostrazioni più iconiche, **classificate** per **stile** e **metodo** seguito:

1. L'approccio Geometrico/Aritmetico (Euclide, ~300 a.C.)
Contrariamente a quanto generalmente si crede, **Euclide** non usò propriamente una dimostrazione per assurdo che è un'aggiunta successiva, ma dimostrò che, dato un qualsiasi elenco finito di primi, è sempre possibile costruirne uno nuovo (o trovarne uno tra i divisori del successore). Se gli "alberi dei fattori" mostravano come un numero si divide fino alle foglie, l'idea di Euclide è l'esatto opposto: è un seme che non smette mai di generare nuovi germogli.



2. Dimostrazione coi Numeri di Fermat (Goldbach, 1730 / Pólya)
Questa prova utilizza una successione di numeri *coprimi* a due a due. Presi i numeri detti di **Fermat F_n = 2^(2^n) + 1**, per induzione si dimostra che ogni termine **F_n** della successione non ha fattori in comune coi termini precedenti. Poiché esistono **infiniti numeri di Fermat** ciascuno con almeno un fattore primo distinto dagli altri, devono esistere infiniti numeri primi. È una sequenza infinita di "contenitori" di fattori primi tutti indipendenti https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/primi-3

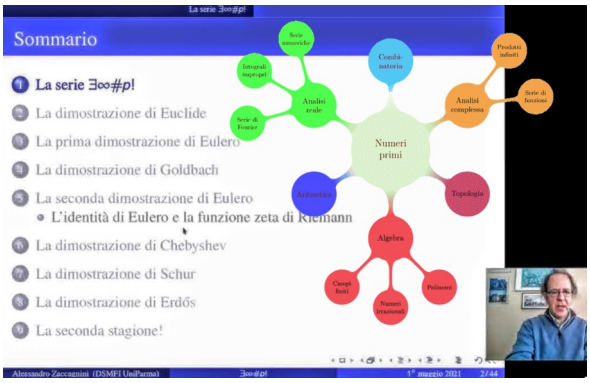
3. L'approccio Analitico (Eulero, 1737)
Eulero dimostrò l'infinità dei primi attraverso l'analisi, spostando il problema dal piano discreto a quello della **densità**. Propose una dimostrazione basta sulla **divergenza della serie** dei **reciproci dei numeri primi**, concentrò l'attenzione sulla "massa" dei numeri primi tra i numeri naturali. Provò che la serie armonica (la somma dei reciproci di tutti i numeri naturali) diverge. Poiché tale somma può essere espressa come un prodotto infinito legato ai numeri primi, se i primi fossero finiti, la loro somma reciproca dovrebbe convergere a un valore finito. Questo legame ha dato vita alla moderna *Teoria Analitica dei Numeri*. https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/eulero/eulero-1

4. L'approccio Topologico (Furstenberg, 1955)
È considerata una delle più "strane" ed eleganti perché utilizza la **topologi**a anziché l'aritmetica tradizionale. **Hillel Furstenberg** utilizzò le proprietà degli *spazi topologici* (nello specifico, le *progressioni aritmetiche* viste come insiemi aperti) per dimostrare che l'insieme dei numeri primi non può essere finito. Si definitsce una topologia sugli interi (Z) per dimostrare che l'insieme di tutti i multipli dei numeri primi non può "coprire" tutti gli interi tranne {-1, 1}, perché altrimenti l'insieme {-1, 1} sarebbe aperto (unione finita di progressioni), cosa impossibile in questa topologia. https://en.wikipedia.org/wiki/Furstenberg%27s_proof_of_the_infinitude_of_primes

5. Dimostrazione basata sulla Teoria dell'Informazione (Gregory Chaitin, 1979)
Utilizza la **complessità di Kolmogorov**. Se i numeri primi fossero finiti, potremmo comprimere qualsiasi numero intero in una **stringa di bit** più corta della sua lunghezza logaritmica, usando solo gli **esponenti** della sua **fattorizzazione**. Considerando allora i numeri primi come "*atomi di informazione*" necessari per descrivere i numeri naturali, ne viene che un loro numero finito non basterebbe a generare la complessità osservata negli interi.

6. L'approccio Costruttivo Moderno (Saidak, 2006)
Filip Saidak ha proposto una versione estremamente semplice seppur recente: basta considerare due numeri consecutivi, n e n+1 sono sempre coprimi. Ne viene che il loro prodotto n*(n+1) deve avere almeno due fattori primi distinti. Ripetendo il processo (n*(n+1) e n*(n+1)+1 sono coprimi), si ottiene n*(n+1)*(n*(n+1)+1) che avrà almeno tre fattori primi, e così via. Si genera una sequenza di numeri con un numero di fattori primi arbitrariamente grande, senza avere i numeri composti ad ostacolo, tuttaltro. https://mathstats.uncg.edu/wp-content/uploads/2018/08/infinitude-of-primes.pdf

(La prima e quest'ultima sono tra le più famose delle famiglie di dimostrazioni presenti ben illustrate nel video del MAT-segnale che aiuta a visualizzare perché il numero di primi è illimitato).



In una mini-serie su MaddMaths!, fatta di articoli e video, **Alessandro Zaccagnini**, matematico, esperto di **teoria dei numeri**, autore della fortunata serie *"Dialogo sui numeri primi"*, ha raccolto e raccontato diverse dimostrazioni del **Teorema** (Euclide) che si aggiungono a quelle citate. Il sommario della mini-serie **Esistono infiniti numeri primi ∃∞#P!** Presenta le **dimostrazioni** di *Euclide*, I e II di *Eulero*, di *Goldbach*, di *Chebyshev*, di *Schur*, di Erdős. Tutte queste belle dimostrazioni formano un "corpus" che mostra come la natura dei **numeri primi** sia una proprietà intrinseca della struttura logica, analitica o topologica dei numeri, e non soltanto una conseguenza della "mancanza di divisibilità" che definisce i composti numerici dal punto di vista puramente aritmetico.

Riflessioni intorno all'opportunità di usare operatori particolari n?/?n

In un recente articolo su **Matmedia.it** avevamo introdotto gli analoghi additivi del *fattoriale* (n!) e del *subfattoriale* (!n) chiamati rispettivamente ***Termiale*** (**n?**) e ***subtermiale*** (**?n**). Questi strumenti si prestano a riflessioni profonde sulla natura dei numeri, resta da vedere se offrono spunti utili e come usare questi operatori per dimostrare l'**infinità dei numeri** primi o di quelli composti. Usare il **Termiale** (**n?**) e il **Subtermiale** (**?n**) per dimostrare l'**infinità dei numeri composti** è un elegante *esercizio di stile matematico*. In fondo, se i numeri primi sono gli "atomi" della matematica, i composti sono le molecole, e queste funzioni ci offrono un modo rapido per costruirne a bizzeffe eludendo i primi.

Dimostrazione dell'infinità dei numeri composti da Termiali

Utilizziamo le definizioni fornite di **Termiale (n?)**, come somma dei primi n numeri naturali, ovvero n? = n*(n+1)/2 (numeri triangolari), e di **Subtermiale (?n)**, la somma alternata definita come ?n = ceil(n/2)*(-1)^(n+1) = (1-(-1)^n*(2n+1))/4.

Per dimostrare che **esistono infiniti numeri composti**, è sufficiente mostrare che la funzione n? (numero triangolare) **genera numeri composti** per ogni n oltre una certa soglia.

Consideriamo n>2 nei due casi.

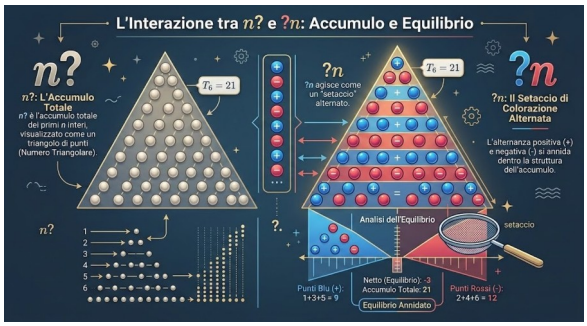
Caso *dispari*: n=2k+1 con k>0, se k=1, 3?=6 è composto e per k>1 abbiamo n? = (2k+1)*(2k+2)/2 = (2k+1)*(k+1) che sono due fattori >1 per cui n? risulta composto.

Caso pari: n=2k con k>1, n? = 2k*(2k+1)/2=k*(2k+1) prodotto di due numeri >1 dunque composto.

Poiché l'insieme dei numeri naturali n > 2 è infinito, la successione dei Termiali n? genera un insieme infinito di numeri composti.

A corollario, possiamo usare il **Subtermiale** per "mappare" questi composti.

Sappiamo che |?n| = ceil(n/2), se prendiamo un qualsiasi numero composto C, possiamo sempre trovare un valore di n tale che il **valore assoluto** del Subtermiale sia esattamente C, basta scegliere n = 2C. Infatti: |?(2C)| = ceil(2C/2) = C. Poiché abbiamo appena dimostrato (tramite n?) che i numeri composti sono infiniti, e poiché la funzione |?n| è **suriettiva** sull'insieme dei naturali, ne consegue che esistono infiniti valori di n per cui |?n| è un numero composto.



Il **Termiale n?** funge da **generatore di composti**, mentre il **Subtermiale ?n** funge da **selettore** che può identificare ogni singolo composto nella successione dei naturali. Insieme, confermano che la "foresta" dei numeri composti non finisce mai.

Poiché la successione dei **Termiali** è infinita e strettamente crescente, essa stessa costituisce una dimostrazione "costruttiva" dell'**infinità dei numeri composti**. Tutto ciò richiama la dimostrazione di *Filip Saidak (2006)* dell'**infinità dei numeri primi** che utilizza proprio la struttura del **Termiale**.

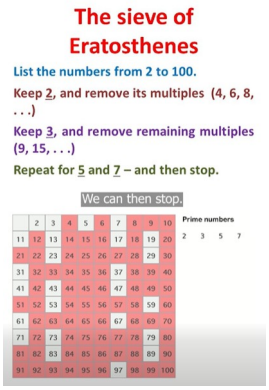
Saidak osserva che due numeri interi consecutivi, n e n+1, sono sempre coprimi ossia primi tra loro MCD(n, n+1)=1. Di conseguenza, il loro prodotto n*(n+1) deve avere almeno due fattori primi distinti. Poiché il **doppio del termiale** è proprio n?*2 = n*(n+1), possiamo dire che il termiale di n "cattura" i fattori primi di due interi consecutivi. Iterando questo concetto, si genera una sequenza in cui ogni termine aggiunge necessariamente nuovi fattori primi alla collezione, dimostrando che non possono essere in numero finito. In tal senso, il **termiale** è un "motore" che spinge la generazione di **nuovi primi**.

Legare tra di loro **Termiale** e **Subtermiale** rivela la struttura "cristallina" della **teoria dei numeri**. Queste due funzioni filtrano i numeri naturali. Mentre n? è la somma di tutti i numeri fino a n, ?n è la loro somma alternata. Sommando o sottraendo le due funzioni, otteniamo una scomposizione che isola i numeri pari e quelli dispari da qui derivano due formule "ponte" estremamente eleganti quali: O_n = (n? + ?n)/2 e E_n = (n? - ?n)/2, dove O_n è la somma dei soli termini dispari ed E_n dei pari.

Possiamo usare questo legame per creare una "fabbrica" infinita di numeri composti. Consideriamo la funzione E_n (somma dei pari): Sappiamo che E_n = (n? - ?n)/2. Per ogni n >2, la somma dei numeri pari E_n è sempre un numero maggiore di 2. Poiché ogni termine della somma è pari, E_n stesso deve essere divisibile per 2. Essendo E_n > 2 e divisibile per 2, E_n è **composto**. Quindi, la combinazione lineare tra Termiale e Subtermiale, ovvero (n? - ?n)/2, genera una successione infinita di **numeri composti** al variare di n. Bisogna notare come il **Subtermiale** agisca da "bilanciere": quando lo sommiamo al totale, "estingue" i numeri pari e raddoppia i dispari; quando lo sottraiamo, fa l'esatto opposto. Si capisce perciò che il limite del rapporto tra le due somme O_n ed E_n per n che va a infinito tende a 1. Ciò significa che per valori di n molto grandi, la differenza tra la somma dei pari e quella dei dispari è un "rumore" trascurabile rispetto all'immensità della somma totale. Al montare dei numeri che crescono all'infinito, con l'equilibrio tra pari e dispari che diventa perfetto, viene da riflettere anche su altri sviluppi asintotici che abbracciano il **corpus delle dimostrazioni**.

Conclusione

Ancora oggi, il valente matematico **Robin J. Wilson** di Oxford propone un breve video creativo e dinamico (*reel*) che nelle **reti sociali** (*social*) dà visibilità virale al tema del **crivello di Eratostene** per l'estrazione dei numeri primi. Ciò dimostra l'interesse perdurante dai tempi degli antichi Greci che arriva fino a noi. Volendo approfondire i vari aspetti della lotta spesso impari dei matematici per comprendere i **numeri primi** seguite i collegamenti (*link*) raccolti nei **riferimenti**. Non troverete particolari citazioni di articoli (*paper*) accademici sui **numeri composti** per una serie di ragioni che qui possiamo riassumere brevemente così: nel mondo della ricerca matematica, gli articoli vengono pubblicati per presentare nuovi risultati, nuove dimostrazioni di problemi aperti, o connessioni inaspettate tra branche diverse della disciplina. La dimostrazione dell'infinità dei numeri composti (come quelle presentate) è considerata un risultato "elementare" (nel senso matematico del termine, cioè fondamentale, non "facile"). Per un matematico professionista, è una conseguenza talmente immediata del *Teorema Fondamentale dell'Aritmetica* o dell'esistenza di infiniti numeri primi che non merita una pubblicazione a sé stante. Dove viene ancora trattato l'argomento accademicamente? Principalmente in tre aree: *Manuali universitari di Teoria dei Numeri*, dove le dimostrazioni formali dell'infinità dei numeri primi e la fattorizzazione, porta l'infinità dei composti a corollario quasi immediato che risiede nei primi capitoli di qualsiasi testo sacro di teoria dei numeri, dove non si fa ricerca, ma si costruiscono le fondamenta della materia. *Articoli di Didattica della Matematica* (*Mathematics Education*), come quello che state leggendo, che potreste trovare interessanti perché analizzano come si può comprendere (o fraintendere) il concetto di numero composto e l'infinità. La ricerca qui si concentra sulle difficoltà cognitive nel passare da un insieme finito a uno infinito, trovate riferimenti su **Google Scholar** cercando ad esempio "Comprensione da parte degli studenti dei numeri primi e composti", "Idee sbagliate sugli insiemi infiniti in teoria elementare dei numeri". Infine, ma sarebbe meglio ripartire da qui, in *Storia e Filosofia della Matematica* dove si trovano articoli che analizzano come il concetto di "numero composto" si è evoluto storicamente, partendo dagli antichi Greci. Andando alla fonte primaria **Gli "Elementi" di Euclide** (Libro VII, definizioni e proposizioni) non ha una proposizione che dice "*i composti sono infiniti*", ma ha tutti gli elementi che lo rendono ovvio (la definizione di numero, l'infinità dei primi, la fattorizzazione). Gli articoli accademici di settore analizzano come matematici greci, Euclide e successori li concettualizzavano.



Se oggi un matematico fa ricerca sui **numeri composti**, non sta cercando di capire come per i primi se sono infiniti, ma studia come sono distribuiti. Le domande poste in termini di ricerca attuali sono molto più complesse: *Quanto possono essere grandi gli intervalli tra due numeri primi consecutivi?* (intervalli fatti solo di numeri composti); *esistono infinite sequenze di numeri composti consecutive di una lunghezza arbitraria?* (Sì, la dimostrazione usa i fattoriali, argomento da manuale avanzato). C'è poi la famosa **Congettura di Goldbach** (ogni *numero pari composto* maggiore di 2 è la somma di due primi) da dimostrare, ma non qui! Del resto 2 è l'unico numero primo Pari e l'insieme E dei **numeri pari** maggiori di 2 è sottoinsieme stretto di tutti i **numeri composti**, ci assicura che anche i **numeri composti** sono senz'altro **infiniti**. Questa è la più immediata dimostrazione appena svolta!

$$E_{>2} \subset C \implies |E_{>2}| \leq |C| \text{ , } |E_{>2}| = \aleph_0 \text{ (l'infinito numerabile)} \implies |C| = \aleph_0.$$

Riferimenti

Euclide, Gli Elementi (a cura di A. Frajese e L. Maccioni), Torino, UTET, 1970.
Benno Artmann, Euclid. The Creation of Mathematics, Springer, 1999.
G.H. Hardy & E.M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers", Oxford, 1938.
Giovanni Prodi, Analisi Matematica, Boringhieri, 1970.
Gregory J. Chaitin, Toward a mathematical definition of life, MIT Press, 1979, pp. 477–498.
https://www.matmedia.it/numeri-primi-e-test-di-primalita
https://www.facebook.com/photo/?fbid=10226097749102113
https://www.facebook.com/share/v/1ApfPT5Ejz
https://www.facebook.com/reel/33345539955093719
https://it.wikipedia.org/wiki/Robin_James_Wilson
https://scholar.google.com
https://www.scienzaatscuola.it/euclide/libro7.html
https://it.wikipedia.org/wiki/Congettura_di_Goldbach
https://en.wikipedia.org/wiki/Natural_density
https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_dei_numeri_primi
https://it.wikipedia.org/wiki/Come_volevasi_dimostrare
https://www.youtube.com/watch?v=DdkRGZ3LmR8
https://calteches.library.caltech.edu/3832/1/Apostol.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=DEmoPfeAAKA
https://maddmaths.simai.eu/category/infiniti-numeri-primi
https://www.youtube.com/watch?v=EXpiaz-DqWY
https://actamath.savbb.sk/pdf/aumb2406.pdf
https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/zaccagnini-dialogo-ebook
https://maddmaths.simai.eu/category/infiniti-numeri-primi
https://www.edrawsoft.com/factor-tree.html
https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid%27s_theorem
https://www.matmedia.it/lanalogo-additivo-del-fattoriale
https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_triangolare
https://www.facebook.com/photo.php?fbid=10236289224402626
https://it.wikipedia.org/wiki/Interi_coprimi