Rapporti da podio

Celebrazione Matematica dei Primi Giorni di Marzo per ***Chalandamarz***
di Sergio Casiraghi

Chalandamarz

Per chi non la conoscesse, **Chalandamarz** è una festa tradizionale svizzera, particolarmente sentita nel *Canton Grigioni*, con dei riscontri anche in *Valtellina* e in *Val Chiavenna*, che celebra l'arrivo della primavera con la fine dell'inverno proprio il primo marzo di ogni anno. Ha origini antichissime. Si pensa che risalgano a riti pagani romani legati alle **Calende di marzo**, il capodanno dell'antico calendario. Il cuore della festa vede i bambini e i giovani delle comunità sfilare per le strade dei villaggi indossando costumi tradizionali e, soprattutto, scuotendo grossi e pesanti campanacci da mucca. Il frastuono generato presenta lo scopo simbolico di svegliare la natura dal letargo invernale e, allo stesso tempo, di scacciare gli spiriti maligni con l'inverno stesso.





È una giornata di festa gioiosa, arricchita da canti, balli, scherzi e dalla condivisione dei cibi tradizionali. Il **Chalandamarz** non è solo un evento folkloristico, ma è un momento fondamentale per rafforzare il senso di comunità e preservare un'importante eredità culturale, come mantenere vivo il legame con la terra e i suoi ritmi stagionali.

Premiati rapporti numerici

Con l'arrivo di marzo, mese che segna il risveglio della natura, cogliamo l'occasione per celebrare alcuni dei rapporti numerici più affascinanti e significativi che la matematica offre avvicinandoci gradualmente alla nuova stagione. Si comincia nei primi tre giorni del terzo mese dell'anno a introdurre quei rapporti che ci guideranno attraverso ampi concetti di armonia, proporzione e bellezza, tanto da meritarsi un posto "da podio" nella nostra comprensione nel mondo dei **rapporti numerici** dispiegati.
Si tratta di rapporti che partono dalle proporzioni note fin dall'antichità come quella aurea **Φ** "*L'eletta d'eternità o per amor*" del bel libro di Luca Piselli (edizioni Efesto, 2023), quindi dal numero d'oro o **Rapporto aureo φ=(1+√5)/2**, passando prima al **Rapporto argenteo δ=(1+√2)**, poi a quello **bronzeo μ=(3+√13)/2**, per continuare a far "risuonare" e conoscere **Rapporti metallici** (*metallic ratios*) un po' meno noti, ma pur sempre significativi, definiti dal valore "*metallico*" di un **numero naturale n** dato dai **rapporti numerici σ_n** = **(n+√(n^2+4))/2**.

Ebbene, tutti sono legati a una **generalizzazione della proporzione aurea**.
Se consideriamo due lunghezze a e b (con a > b) tali che n volte la lunghezza maggiore sommata alla lunghezza minore, in rapporto alla lunghezza maggiore stessa, sia uguale al rapporto tra la lunghezza maggiore e quella minore, questo è il nostro **rapporto metallico**: **$(n*a+b)/a = a/b = \sigma_n$** .
Come vedremo, questi numeri sono tutti **rapporti numerici irrazionali algebrici**.

Sul podio con spirito olimpico: Oro, Argento e Bronzo



Torna, insieme ai **XIV Giochi paralimpici invernali**, l'allestimento di un particolare *percorso matematico* che inizia dai gradini più alti del podio e impegna i primi giorni di marzo coi tre **rapporti metallici** principali presentati con degli esempi particolari da sperimentare:

1 Marzo: Rapporto Aureo (phi)

Al primo posto non potevamo che trovare il celebre **rapporto aureo**, spesso indicato con la lettera φ (phi). Questo **numero irrazionale algebrico**, approssimativamente uguale a **1.618**, è noto fin dall'antichità per la sua presenza in natura, arte e architettura. Si definisce come *il rapporto tra due lunghezze a e b (con a > b) tale che il rapporto tra la loro somma e la lunghezza maggiore sia uguale al rapporto tra la lunghezza maggiore e quella minore*: **(a+b)/a = a/b = φ**. Matematicamente, phi è anche la soluzione positiva dell'equazione quadratica **x^2-x-1 = 0**, ovvero **φ=(1+√5)/2**. La bellezza di questo rapporto risiede nella capacità di generare spirali armoniose e delle proporzioni visivamente piacevoli. Aspetti del "numero d'oro" sono ben illustrati nel citato libro di [Luca Piselli]() e su questi insisteva spesso la cara [Tullia Norando]() considerandolo il più bel numero dell'universo, come *Dan Brown* ne "*Il codice Da Vinci*" da dire che in fondo siamo sempre qui, come diciamo noi matematici: "*phi è di un'acca più interessante del pi*" sia se scrivo φ = {(1+1/}(∞)1)(∞) rappresentato come frazione continua φ = [1; 1, 1, 1, ..] oppure come soluzione di 1/φ = φ -1 o rapporto tra i numeri consecutivi della **successione di Fibonacci** φ = st(F_{n+1}/F_n) con st(n) = ∞.

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

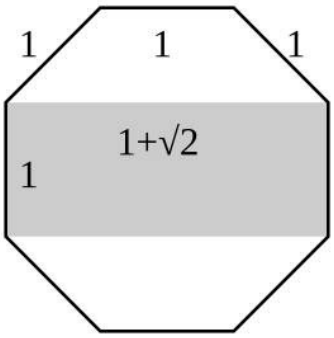
Esempi aurei. Fillotassi: Osserva, chiediti, immagina

A scuola s'insegna spesso il **rapporto aureo** (φ) attraverso l'arte o l'architettura classica, ma la Natura ne è l'esempio più vivido. Vedendo le numerose fioriture primaverili, un esempio da proporre in classe è la **Fillotassi**, ovvero l'ordine con cui le foglie e i petali sono disposti attorno allo stelo. Molti fiori hanno un numero di petali che è un numero di Fibonacci (3 per i gigli/Amaryllis se consideriamo i sepali come petali, 5 per ranuncoli ed Ellebori, 8, 13, 21 per le margherite). Il Narciso, con la sua simmetria spesso a 6 punte, è un esempio di come la botanica utilizzi schemi efficienti basati su questa sequenza. La **Fillotassi Aurea** garantisce che ogni foglia riceva la massima quantità di luce solare senza ombreggiare quella sottostante, e che ogni petalo abbia lo spazio ottimale per aprirsi. Un modo potente per collegare la bellezza naturale alla precisione matematica del rapporto aureo è quello di sfidare gli studenti con l'immagine di un fiore sul quale andare a identificare rettangolo aureo e spirale: Contare i petali e discutere sugli aspetti matematici della Natura rilevando i motivi di efficienza biologica (massima luce, minimo ingombro, distribuzione ottimale). La **primula**, per esempio, ha una simmetria di base pentamera: ogni fiore ha 5 petali in genere, un numero della **successione di Fibonacci** che sappiamo condurre al **rapporto aureo**. La **spirale aurea**, che è un tipo specifico di *spirale logaritmica* (equiangolare) differente dalla **spirale di Fibonacci** (costruita con quarti di cerchio), cresce in modo continuo e liscio con rapporto costante ogni quarto di giro, traccia l'ordine di fioritura e la disposizione spaziale dei boccioli e delle foglie (phyllotaxis). La curvatura della spirale, espandendosi verso l'esterno, mantiene la stessa forma (autosomiglianza), tocca e connette i punti di origine di ciascun fiore sul raggruppamento centrale, mostrando come la pianta organizzi i suoi rami floreali per massimizzare la luce solare e minimizzare l'ingombro. Queste analisi passate al vaglio della **fillotassi aurea** portano a temi cari alla **Geometria Sacra**, così come si possono usare per indagare la **Geometria Genetica Generativa** che dai "semi" porta al "fiore della vita" con l'applicazione di regole da cui ricavare, andando oltre, delle belle decorazioni da vedere e mostrare. Tutto conta, osservare la disposizione delle foglie come contare i petali!



2 Marzo: Rapporto Argenteo (delta)

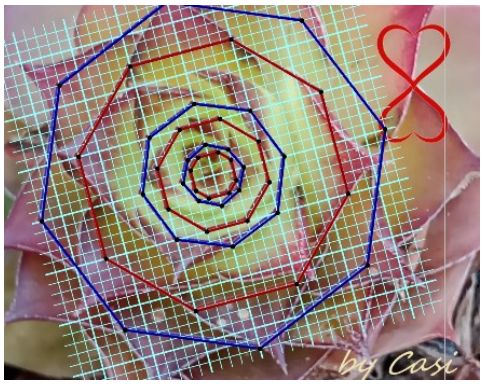
Sul secondo gradino del podio troviamo il **rapporto argenteo**, indicato con la lettera greca δ (delta, o δ_s con pedice "S" a indicare l'iniziale di Silver = argento, talvolta σ). Meno celebre del fratello dorato, ma non meno affascinante, il **rapporto argenteo** è legato alla geometria dell'*ottagono regolare* e alle proprietà delle *frazioni continue*, oltre ad essere il limite del rapporto tra numeri consecutivi della successione di Pell, analogamente al **rapporto aureo** che è il limite del rapporto tra numeri consecutivi di **Fibonacci**.



Quello **argenteo** si definisce come il *rapporto tra diagonale e lato di un ottagono regolare*, e risulta approssimativamente uguale a **2.414** e, matematicamente, δ è soluzione positiva dell'*equazione quadratica* **x^2-2x-1 = 0**, ovvero **δ = 1+√2.** Come il rapporto aureo, anche quello argenteo esprime interessanti proprietà legate alla *ricorsione* e alla *tassellazione.*

Esempi argentei. Ottagoni infiorati

Seguendo l'esempio aureo vediamo come la geometria astratta si fonde con la biologia di una pianta succulenta quale ***Sempervivum***.



La natura non è solo bella, è **matematica**. Le foglie della pianta crescono seguendo una spirale precisa (fillotassi), qui vengono evidenziati degli ottagoni per confermare visivamente la presenza delle **8 spirali principali** che partono dal centro. Solitamente in queste piante il numero di spirali (parastiche) corrisponde a due numeri di Fibonacci consecutivi (ad esempio 5 in un senso e 8 nell'altro, o 8 e 13). Il numero 8 è l'ottavo termine della successione di Fibonacci. la successione di Fibonacci e il rapporto aureo tendono all'infinito e rappresentano un "cuore" matematico che sentiamo battere in tutta la natura.

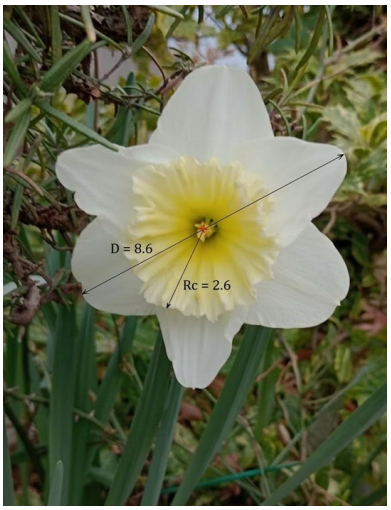
L'ottagono, in molte culture, rappresenta l'equilibrio tra cerchio (il divino/infinito) e quadrato (l'umano/finito). L'infiorata celebra questo equilibrio attraverso la bellezza della vita che sboccia. L'appiattimento della figura per individuare i punti di sviluppo delle spirali pone in rilievo il disegno di un ottagono regolare abbastanza accurato a coordinate intere ottenute col ricorso ai numeri di Pell per posizionare i vertici. Ad esempio, se si disegna un **ottagono** con i vertici in (±P_n, ±P_{n+1}), (±P_{n+1},±P_n) utilizzando i **numeri di Pell** (https://oeis.org/A000129) **P_n = 2*P_{n-1} + P_{n-2}, P_1=1, P_0=0** a partire da un n relativamente grande s'ottene una sua buona *approssimazione razionale* dove tutti i vertici sono equidistanti dall'origine e formano angoli pressoché uniformi attorno ad essa. Come metodo di costruzione di ottagoni regolari non sarà magari speciale, ma consente di approfondire aspetti interessanti seppure semplificati della modellistica matematica. Pone così l'accento sulla presenza in natura di **simmetrie ottali** (o a 8 vie), seppure meno comuni, oltre a **Succulente** e **Rosette**, anche il **Camedrio alpino**, l'**Anice stellato** e tante altre ancora.

3 Marzo: Rapporto Bronzeo (mu)

Al terzo posto, a completare il podio metallico, troviamo il **rapporto bronzeo**, indicato con la lettera μ (mu). Meno noto dei precedenti, il **rapporto bronzeo** emerge in diversi contesti matematici legati alla *teoria dei numeri* e alle *frazioni continue*. È approssimativamente uguale a circa **3.303** e risulta legato alla geometria di *poligoni regolari* assai meno comuni. Matematicamente, μ è la soluzione positiva dell'*equazione quadratica* **x^2-3x-1 = 0**, ovvero **μ=(3+√13)/2**. Anche se risulta meno visibile nelle nostre esperienze quotidiane, il rapporto bronzeo contribuisce alla ricchezza e alla complessità del *panorama numerico*.

Esempi bronzei.

Mentre il Rapporto Aureo domina la fillotassi classica, come visto, il **Rapporto Bronzeo** è più "timido" a farsi trovare in natura, ma possiamo scovarlo se guardiamo con l'occhio del matematico quegli splendidi fiori che stanno sbocciando a primavera. Un esempio concreto è basato sulla struttura del **Narciso** (fotografato) in cui si nota che il rapporto tra Diametro totale del perianzio e la misura del Raggio della corona centrale in cm è D / Rc ≈ 3.308 con scostamento dal valore teorico di **μ** di appena lo **0,13%**. Una precisione sorprendente, per un organismo biologico, che suona a conferma della struttura proporzionale profonda e non casuale, come sta emergendo negli studi specifici sulla *morfometria floreale* più recenti. In botanica, il genere *Narcissus* è studiato per la sua struttura unica: un **perianzio** (i petali esterni) e una **paracorolla** (la corona o "trombetta" centrale). Mentre molti fiori seguono la successione di Fibonacci (legata al numero d'oro), il narciso presenta spesso una simmetria esagonale (6 petali) che crea rapporti geometrici diversi. Alcuni ricercatori di biomatematica (che seguono le teorie di Vera W. de Spinadel sulle **Medie Metalliche**) hanno osservato che quando la struttura non è puramente spiraliforme, ma implica "salti" morfologici tra verticilli diversi, entrano in gioco le **medie metalliche superiori**. Sebbene il **rapporto bronzeo** non ci sia nei manuali di botanica del secolo scorso, è presente nei più recenti studi della **Morfometria Computazionale** e in **Teoria delle Medie Metalliche in Natura**, letteratura che esplora l'ottimizzazione dello spazio nei fiori a "coppa e piattino". Il rapporto 3.3 della "campanella" permette una distribuzione del peso della corona che non destabilizza il delicato stelo del narciso durante la pioggia (un'efficienza strutturale "bronzea"). La strofa poetica può dare un segno a questo passo:



Petali distesi al Sole di marzo, il bronzo nel numero traccia il suo sbalzo.
Tre volte e un po' la corona si espande, rende la logica ancor più grande.

Mentre il **rapporto aureo** è indissolubilmente legato alla *simmetria pentagonale* (stella a 5 punte), quello **bronzeo** emerge nelle strutture con simmetria a 12 punte (*dodecagonale*). In natura lo si osserva in alcuni modelli di crescita di piante tropicali o nella disposizione di certe squame dove lo spazio tra i nodi di crescita triplica in genere a ogni ciclo, nei "quasi-cristalli" (strutture solide dove gli atomi sono ordinati, ma non periodici), nel rapporto tra le distanze dei vertici nelle *tassellature di tipo Stampfli* che segue proprio il valore di **μ**. È una geometria che si può immaginare nascosta anche nella struttura molecolare delle rocce.

Oltre il Podio: Altri Rapporti Metallici con definizioni generalizzate

I tre rapporti **aureo**, **argenteo** e **bronzeo** non sono che i primi di una famiglia più ampia, che sono conosciuti come "**rapporti metallici**" (*metallic ratios*). Questi rapporti sono definiti dalle soluzioni positive delle **equazioni quadratiche x^2-n*x-1 = 0** con n è intero positivo.

Al crescere di n, otteniamo rapporti metallici sempre più grandi, ciascuno con delle proprie peculiarità matematiche.

I rapporti metallici sono una famiglia di *numeri irrazionali algebrici* definiti in modi eleganti e generali. A ogni numero intero positivo n corrisponde un **rapporto metallico di ordine n** che viene indicato con la lettera greca $\boldsymbol{\sigma_n}$ e **definito** a partire dal *valore limite* della **frazione continua** $\boldsymbol{\sigma_n}$ = {n+/(}(∞){n)}(∞) = n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(..)))))))) e in altri modi. Tale espressione può essere riscritta in maniera più concisa $\boldsymbol{\sigma_n}$ = n + 1/$\boldsymbol{\sigma_n}$ così moltiplicando entrambi i membri per $\boldsymbol{\sigma_n}$ si ha l'**equazione quadratica** $\boldsymbol{\sigma_n}$^2-n*$\boldsymbol{\sigma_n}$-1 = 0. La soluzione positiva di questa equazione, usata per rappresentare il **rapporto metallico**, è data dalla **formula:** $\boldsymbol{\sigma_n}$ = **(n+√(n^2+4))/2**, l'altra soluzione **(n-√(n^2+4))/2** = -1/$\boldsymbol{\sigma_n}$ è la *formula **coniugata*** data dall'opposto dell'inverso **(√(n^2+4)-n)/2** = 1/$\boldsymbol{\sigma_n}$ da cui discendono diverse proprietà legate alle ***formule di Viète.*** Notiamo che per **n=1**, si ha il **rapporto aureo** φ **= (1+√5)/2**; per **n=2**, il **rapporto argenteo δ=(1+√2)**; per **n=3**, il **rapporto bronzeo μ=(3+√13)/2**. È una **famiglia di successioni** che sono caratterizzate dalle definizioni che generalizzano quelle di **Fibonacci** (per n=1) e di **Pell** (per n=2) ovvero sia $S_{n,0}$ = 0, $S_{n,1}$ = 1, $S_{n,k}$ = n*$S_{n,k-1}$ + $S_{n,k-2}$ per k >1 e al limite per st(K)=∞ si ha st($S_{n,K+1}$ / S_n) = $\boldsymbol{\sigma_n}$.

Per comprendere appieno il significato profondo dei numeri già definiti, possiamo fare un passo indietro per esaminare come si arriva a una loro espressione geometrica a partire direttamente dalla **formula matematica** esplicitata: $\boldsymbol{\sigma_n}$ = **(n+√(n^2+4))/2**. Seguiamo ora un approccio a ritroso che, usando la soluzione positiva dell'equazione quadratica ricavata dalla successione dei **rapporti metallici**, risulta più efficace in ambito didattico perché parte da un'espressione matematica concreta e facilmente ricavata (in forma chiusa) per svelarne l'origine geometrica.

Ripercorriamo algebricamente i passaggi che l'hanno generata applicando la nota formula risolutiva delle *equazioni algebriche di secondo grado* all'equazione quadratica generale $\boldsymbol{\sigma_n}$^2-n*$\boldsymbol{\sigma_n}$-1 = 0 dove possiamo identificare i tre coefficienti A=1, B=-n e C=-1. Da questa equazione si isola il termine quadratico $\boldsymbol{\sigma_n}$^2 = n*$\boldsymbol{\sigma_n}$ + 1. Dividendo entrambi i membri per $\boldsymbol{\sigma_n}$ (che è un numero sempre positivo), otteniamo quella **forma ricorsiva** interessante che avevamo già visto all'inizio giustificata diversamente: $\boldsymbol{\sigma_n}$ = n + 1/$\boldsymbol{\sigma_n}$.

È proprio a questo punto che il collegamento tra l'*algebra astratta* e la *geometria concreta* diventa visibile. Se pensiamo al numero metallico $\boldsymbol{\sigma_n}$ come il **rapporto costante** tra due lati generici a e b (n tale che a/b = $\boldsymbol{\sigma_n}$), possiamo sostituire questa definizione nell'equazione precedente: **a/b = n + b/a**. Passando a denominatore comune il lato destro dell'equazione, arriviamo alla **fondamentale identità geometrica** che lega tutti i vari **rapporti metallici**:

$$\frac{n \cdot a + b}{a} = \frac{a}{b} = \sigma_n$$

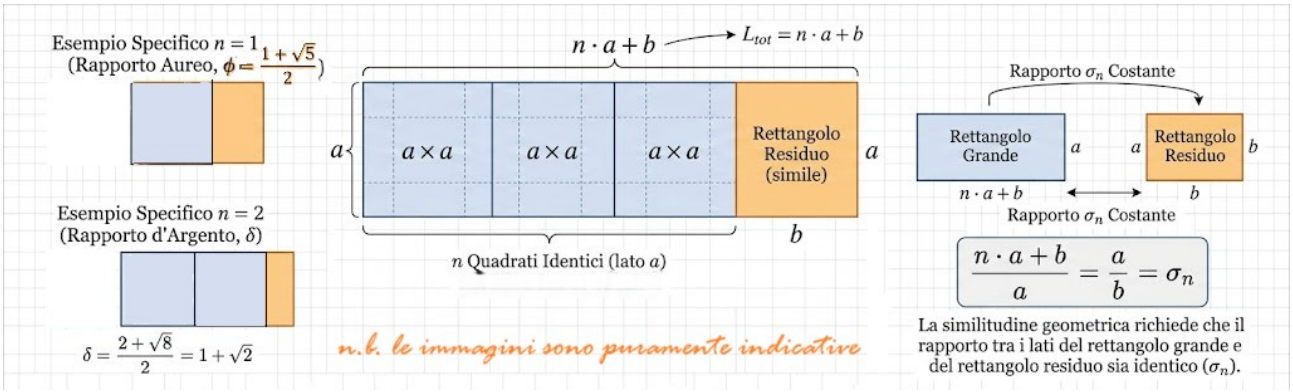
Formula che rappresenta la **generalizzazione geometrica** della definizione di **Rapporto Aureo** ed è il punto di partenza per descrivere tutti i **numeri metallici (n*a+b)/a = a/b = σ_n**

La definizione geometrica

Per tornare a questa uguaglianza che definisce tutti i **numeri metallici**, dobbiamo pensare in termini di **auto-similarità** all'interno di un rettangolo che può essere anche un semplice foglio di carta.

Consideriamo un rettangolo con i lati L e a, dove L > a. Vogliamo che il rapporto tra il lato lungo (L) e quello corto (a) sia costante anche dopo che sono stati rimossi dei quadrati dal rettangolo originale.

Per il **rapporto metallico** n-esimo (**σ_n**), la condizione è che, se togliamo **n quadrati** di lato a dal rettangolo originale, il rettangolo rimanente deve avere lo stesso rapporto tra i lati del rettangolo di partenza.



Interpretazione visiva

- **Se n=1 (Rapporto Aureo φ):** Un *rettangolo aureo* è tale che, tolto **un** quadrato costruito sul lato minore, resta un *rettangolo simile* a quello di partenza.
- **Se n=2 (Rapporto d'Argento δ):** Un *rettangolo d'argento* è tale che, tolti **due** quadrati costruiti sul lato minore, resta un rettangolo simile a quello di partenza.
- **Se n=3 (Rapporto Bronzeo μ):** Un *rettangolo bronzeo* è tale che, tolti **tre** quadrati costruiti sul lato minore, resta un rettangolo simile a quello di partenza. Questa proprietà di "*autoriproduzione*" dopo la rimozione di tre unità è ciò che definisce visivamente il numero bronzeo: una progressione che non si accontenta di un solo passo (come l'oro) o di due (come l'argento), ma **richiede una tripla iterazione**.

Passaggi algebrici per quanto elementari, da rifare direttamente sul rapporto **σ_n** = a/b (con a > b). Se il lato lungo del rettangolo originale è L = n*a+b, il rapporto tra i lati del rettangolo grande è (n*a+b)/a. Per definizione, questo rapporto deve essere uguale a quello del rettangolo piccolo che rimane dopo aver rimosso gli n quadrati (che ha lati a, b), quindi: (n*a+b)/a = a/b.

Dall'equazione ottenuta, scomponiamo la frazione a sinistra per sostituire a/b con σ_n così da n+b/a = a/b abbiamo $n+1/\sigma_n = \sigma_n$ che, moltiplicando per σ_n, diventa **σ_n^2-n*σ_n-1 = 0** e risolvendo questa equazione in **σ_n** (prendendo la soluzione positiva) si ritrova la formula **σ_n = (n + √(n^2+4)) / 2** che per ogni **rapporto metallico** esprime la traduzione algebrica di "ritmo" geometrico. Il *numero metallico* dice, infatti, quanti quadrati dobbiamo "sacrificare" via via per ritrovare la stessa proporzione fino all'infinitamente piccolo. Questo processo a ritroso dimostra come la struttura intrinseca di **σ_n** derivi direttamente dalla necessità di mantenere una proporzione costante, anche dopo aver rimosso n quadrati perfetti dal rettangolo originale.

Questa relazione evidenzia come i **rapporti metallici** governino proporzioni e armonie in contesti geometrici e numerici via via sempre più complessi al crescere di *n*.

L'associazione di questi rapporti ai primi giorni marzolini offre modi originali e suggestivi per sollecitare ad avvicinarsi alla matematica. Ci invita a riflettere sull'ordine e sulla bellezza nascosti dietro i numeri e a riconoscere la presenza di **costanti universali** che governano, in modi spesso inaspettati, la realtà che ci circonda, anche volendo partire da un semplice foglio di carta. Che sia l'oro, l'argento o il bronzo, ogni **rapporto numerico** ha una storia da raccontare e un posto da podio nella nostra comprensione del mondo.

Irrazionalità di tutti i Rapporti “metallici”

Possiamo dimostrare che se n>0 i rapporti "metallici" σ_n=(n+√(n^2+4))/2 sono **irrazionali**.

Ci sono almeno **tre percorsi logici** da seguire per dimostrarlo:

1. Dimostrazione tramite l'argomento della radice

Un numero della forma (a + √b)/c (con a, b, c interi) è irrazionale se e solo se b **non** è un quadrato perfetto. Nel caso dei **numeri metallici**, il problema si riduce a verificare se n^2+4 può essere un **quadrato perfetto** per n>0.

Supponiamo per assurdo che n^2+4 sia un quadrato perfetto, diciamo k^2:

k^2 = n^2 + 4, k^2 - n^2 = 4, (k - n)*(k + n) = 4. Poiché k-n e k+n, come fattori di 4, devono essere entrambi interi. Inoltre, la loro somma (k-n) + (k+n) = 2k è un numero pari, il che implica che i due fattori debbano avere la stessa parità. Le uniche coppie di fattori di 4 che soddisfano questa condizione sono (2, 2) oppure (-2, -2). Se k + n = 2 e k - n = 2, sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo 2n = 0, cioè **n = 0**. Ma dato che per definizione i numeri metallici prevedono n come intero positivo, n^2 + 4 non è mai un quadrato perfetto. Di conseguenza, la sua radice quadrata è irrazionale, e tale resta anche dopo la somma con n e la divisione per 2.

2. Dimostrazione tramite il Teorema delle radici razionali

I numeri metallici σ_n sono le radici positive dell'equazione di secondo grado: x^2 - n - 1 = 0.

Il **teorema delle radici razionali** afferma che se un'*equazione polinomiale monica* (con il primo coefficiente uguale a 1) a coefficienti interi ha radici razionali, queste devono essere divisori del termine noto. In questo caso, i divisori di -1 sono solo +1 e -1.

- Sostituendo x = 1: 1^2 - n*1 - 1 = -n. Questo è uguale a zero solo se n = 0.

- Sostituendo x = -1: (-1)^2 - n*(-1) - 1 = n. Questo è uguale a zero solo se n = 0.

Poiché per ogni **numero metallico** considerato n>0, l'equazione non ammette radici razionali. Pertanto, le sue soluzioni devono essere **necessariamente irrazionali**.

Questo metodo è particolarmente utile per collegare i numeri alla **teoria delle frazioni continue**, dato che ogni σ_n può essere espresso in modo elegante come:

σ_n = n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(n+1/(..)))))))))= {n+/(}(∞){n)}(∞) = [n; n, n, ..].

Collegare i numeri metallici alla teoria delle frazioni continue offre una delle dimostrazioni di irrazionalità più eleganti e visivamente intuitive in matematica.

La rappresentazione come frazione continua

Ogni **numero metallico σ_n** è definito dalla relazione **$\sigma_n = n + 1/\sigma_n$** per cui se andiamo a sostituire ripetutamente l'espressione di σ_n dentro se stessa, otteniamo una frazione continua infinita per la quale si usa una notazione sintetica, ovvero si è soliti scrive come σ_n = [n; n, n, n, ..]. Per il numero d'oro (n=1) è φ = [1; 1, 1, ..], per quello d'argento (n=2) è δ = [2; 2, 2, ..], per quello di bronzo (n=3) è μ = [3; 3, 3, ..], e così via.

3. Dimostrazione tramite il criterio di irrazionalità delle frazioni continue

Il punto centrale della dimostrazione è un teorema fondamentale della teoria dei numeri:

> **Un numero reale è razionale se e solo se la sua rappresentazione in frazione continua è finita.**

Infatti, il processo per calcolare una frazione continua è identico all'**algoritmo di Euclide** per trovare il **Massimo Comun Divisore** (MCD) tra numeratore e denominatore. Se partiamo da un numero razionale p/q, l'algoritmo deve terminare necessariamente in un numero finito di passaggi, perché i resti sono interi che decrescono strettamente fino a raggiungere zero.

Dimostrazione intuitiva (per assurdo)

Immaginiamo per assurdo che σ_n sia un **numero razionale**. Se così fosse, a un certo punto la sua espansione in frazione continua dovrebbe fermarsi. Tuttavia, lo schema visto di natura ricorsiva **$\sigma_n = n + 1/\sigma_n$** presenta proprietà di **autosimilarità**: il numero "contiene" se stesso. Estrarre la parte intera (n) e invertire il resto ci riporta esattamente al punto di partenza. Questo significa che il processo di generazione dei termini:

1. Non può mai produrre un resto pari a zero (perché tornerà sempre a generare n).
2. È intrappolato in un ciclo infinito.

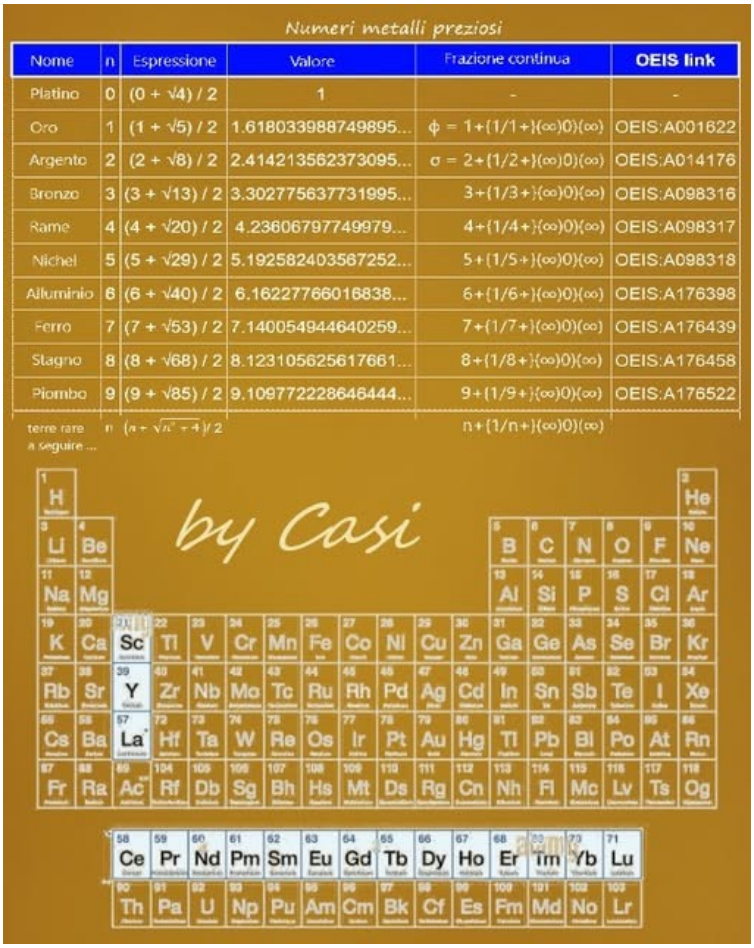
Dato che l'espansione in frazione continua è infinita (e periodica), il numero non può essere espresso come rapporto di due interi.

C.V.D.

Questa dimostrazione permette di visualizzare i *numeri metallici* come i numeri "più nobili" o "meno approssimabili" dai razionali, proprio a causa della costanza dei loro coefficienti nella frazione continua. Il numero d'oro (n=1), avendo i coefficienti più piccoli possibili, è in questo senso, se si vuole, il numero "più irrazionale" di tutti.

Riferimenti alle “terre rare” numeriche

Una selezione di riferimenti *bibliografici* e *sitografici* recenti e autorevoli per approfondire il tema dei **Rapporti Metallici** (*ph, delta, mu, sigma_n*) confermano la validità della formula generale $\sigma_n = (n + \sqrt{(n^2+4)}) / 2$ e offrono vari spunti utili per estendere il "podio" oltre il bronzo, toccando il **platino** (n=4) o il **rodio** (n=5) per aggiungere delle "**menzioni d'onore**" e andare oltre coi preziosi **numeri metallic**i reali in successione da 1 a ∞.



Nome	n	Espressione	Valore	Frazione continua	OEIS link
Platino	0	(0 + √4) / 2	1	-	-
Oro	1	(1 + √5) / 2	1.618033988749895...	ϕ = 1+{1/1+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A001622
Argento	2	(2 + √8) / 2	2.414213562373095...	σ = 2+{1/2+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A014176
Bronzo	3	(3 + √13) / 2	3.302775637731995...	3+{1/3+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A098316
Rame	4	(4 + √20) / 2	4.23606797749979...	4+{1/4+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A098317
Nichel	5	(5 + √29) / 2	5.192582403567252...	5+{1/5+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A098318
Alluminio	6	(6 + √40) / 2	6.16227766016838...	6+{1/6+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A176398
Ferro	7	(7 + √53) / 2	7.140054944640259...	7+{1/7+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A176439
Stagno	8	(8 + √68) / 2	8.123105625617661...	8+{1/8+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A176458
Piombo	9	(9 + √85) / 2	9.109772228646444...	9+{1/9+}{(∞)0}{∞}	OEIS:A176522
terre rare a seguire ...	n	$(n + \sqrt{n^2+4})/2$		n+{1/n+}{(∞)0}{∞}	

1. Bibliografia Accademica Recente (2020-2026)

Testi e articoli che analizzano proprietà matematiche avanzate e le relazioni tra le diverse "medaglie" metalliche:

- **Chetansing Rajput (2021-2026):** È uno degli autori più prolifici degli ultimi anni su questo tema specifico.
    - *Metallic Ratios: The Mathematical Relationships between different Metallic Means*, Journal of Advances in Mathematics, Vol. 20, 2021.
    - *Metallic Means in Primitive Pythagorean Triples*, Journal of Advances in Mathematics, Vol. 24, 2025.
- **Sivaraman Ramaswamy (2021-2024):** Ricerche focalizzate sulle proprietà analitiche e la teoria dei numeri.
    - *Rational Numbers and Metallic Ratios*, ResearchGate, settembre 2024.
    - *Three Interesting Properties of Metallic Ratios*, Journal of Contemporary Issues in Business and Government, 2021.
- **B. Jeyanthi et al. (2020):** * *Exploring Metallic Ratios*, Mathematics and Statistics, 8(4), 2020. Un articolo che introduce le versioni generalizzate (Platino, Rodio, ecc.) oltre il bronzo.

2. Opere Fondamentali e Trattati (Reference Books)

Testi essenziali per comprendere la visione d'insieme della "**Matematica dell'Armonia**":

- **Alexey Stakhov (2009-2020):**
    - *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science*, World Scientific, 2009.
    - *Mathematics of Harmony as a New Interdisciplinary Direction and "Golden" Paradigm of Modern Science* (3 volumi), World Scientific, 2019-2020.
- **Vera W. de Spinadel (Pioniera del termine Mezzi Metallici "Metallic Means"):**
    - *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Librería, 1998.
    - *The Metallic Means Family and Multifractal Spectra*, Nonlinear Analysis, 1999.
- **Luca Piselli Φ** *L'eletta d'eternità o per amor* , EdizioniEfeso, 2023. https://linktr.ee/luca_piselli

3. Risorse Online e Linkografia (Sitografia)

Per contenuti visuali, frazioni continue e applicazioni pratiche:

- **ResearchGate - Exploring Metallic Ratios:** Un'ottima risorsa per scaricare PDF su derivazioni e proprietà dei rapporti di ordine superiore.
- **Wolfram MathWorld - Metallic Means:** Per la verifica rigorosa delle formule delle frazioni continue e delle equazioni quadratiche x^2 - n*x - 1 = 0.
- **Vera de Spinadel - The Family of Metallic Means:** Archivio storico e scientifico curato dalla stessa autrice che ha codificato la famiglia dei rapporti metallici.
- **Tang Math - Satisfraction:** Risorsa ludico-didattica, eccellente per visualizzare il "senso delle frazioni" attraverso il confronto interattivo.
- **Dalle Frazioni Continue alla Trascendenza di π** : Un bel libro da riaprire con l'approssimarsi del #piday https://www.centromorin.it/biblioteca/bib_virtuale/Dalle%20Frazioni%20Continue%20alla%20Trascendenza.pdf

4. Rapporti metallici: per spunti e approfondimenti

- https://en.wikipedia.org/wiki/Metallic_mean
- https://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_aurea
- https://it.wikipedia.org/wiki/Frazione_continua
- https://en.wikipedia.org/wiki/Simple_continued_fraction
- https://it.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_di_Euclide
- https://www.facebook.com/photo?fbid=1160076662791285
- https://fds.mate.polimi.it/file/1/File/Montevarchi/Numero_Oro_Atti.pdf
- https://fds.mate.polimi.it/file/3/File/IRRE_05/Sintesi_numero_oro.pdf
- https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_delle_radici_razionali
- https://it.wikipedia.org/wiki/Fillotassi
- https://it.wikipedia.org/wiki/Spirale_aurea
- https://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_argentea
- https://en.wikipedia.org/wiki/Silver_ratio
- https://en.wikipedia.org/wiki/Pell_number
- https://www.facebook.com/photo?fbid=10228269021462565
- https://www.facebook.com/photo/?fbid=10236430633577767
- https://www.facebook.com/photo/?fbid=10231532852056290
- https://www.facebook.com/photo?fbid=495384500296426
- https://www.facebook.com/photo/?fbid=10231588086037105
- https://www.facebook.com/groups/2692404370981189/permalink/4064827773738835

5. **Chalandamarz: l’antica tradizione di andare a svegliare l’erba (rif. Social)**
    - https://www.facebook.com/photo/?fbid=10244333275893275
    - https://www.facebook.com/photo/?fbid=647739487362776
    - https://www.facebook.com/watch/?v=921678880357559
    - https://www.facebook.com/reel/1856450411721667
    - https://www.facebook.com/reel/769130402555107



Chiudiamo col recente **podio allargato** dove son saliti tutti coloro che hanno partecipato: La 40^ edizione della gara del **Pizzo Scalino** - Coppa Italia giovani, quest'anno disputata a Caspoggio, che ha visto una grande partecipazione di tanti atleti locali con ottimi risultati.

