Georg Cantor e l'infinito

di Antonino Giambò

1. Questo articolo tratta di un matematico, Georg Cantor, e di un concetto, l'infinito. Georg Cantor e l'infinito costituiscono un binomio inscindibile. Su questo binomio sono state scritte milioni di pagine e qualcuno potrebbe pensare legittimamente che un altro articolo sia perfettamente inutile. Forse è così. Ciò nondimeno, siccome ho la presunzione di credere che questo contributo possa essere utile agli studenti liceali, lo stendo ugualmente e spero che sia proprio come io penso.

L'articolo sarà suddiviso sostanzialmente in due parti: la prima sarà dedicata agli insiemi infiniti, la seconda alla vita di Cantor.

Nella prima parte ci sono delle dimostrazioni che potrebbero non essere comprese appieno dai giovani studenti. Se sarà così, suggerisco di accantonarle provvisoriamente, per ritornarci sopra magari in futuro.

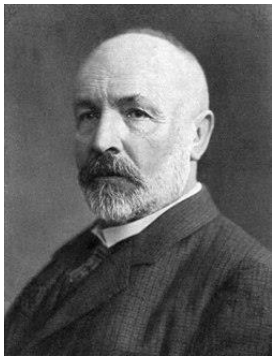


figura 1 – Georg Cantor

2. C'è stato un tempo in cui il concetto di "infinito", anzi il termine stesso "infinito", era letteralmente bandito dal linguaggio della Matematica. Meno che mai se ne poteva far uso nelle dimostrazioni.

In realtà, il filosofo greco Aristotele (384-322 a.C.) introdusse una distinzione netta tra ***infinito attuale*** e ***infinito potenziale***, accettando solamente il secondo ed inibendo categoricamente l'uso del primo.

Al fine di capire di cosa stiamo parlando, può essere utile qualche chiarimento: l'infinito potenziale è un processo che non ha mai termine (per esempio, aggiungere 1 ad un qualsiasi numero naturale); l'infinito attuale è invece un ente compiutamente dato (per esempio, l'insieme dei numeri naturali).

Come ho detto, solo al primo veniva riconosciuto diritto di cittadinanza, il secondo non si poteva neppure nominare.

Lo stesso Euclide (attivo intorno al 300 a.C.), che pure dimostrò che "i numeri primi sono infiniti", non espresse l'enunciato in questi termini, che sottintendevano l'esistenza dell'ente completo e compiuto "tutti i numeri primi", ma si servì della seguente circonlocuzione [1] [*Elementi*, libro IX, prop. 20]:

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶνν

(*I numeri primi sono più di ogni molteplicità proposta di numeri primi*.)

L'interdizione di Aristotele perdurò per circa duemila anni (*ipse dixit*!).

Il noto otto coricato, ∞, simbolo introdotto dal matematico inglese John Wallis (1616-1703) in un suo trattato sulle sezioni coniche (*De sectionibus conicis*, 1655), rappresenta sostanzialmente un infinito potenziale, poiché è usato per descrivere il comportamento di una variabile reale che cresce indefinitamente.

Ancora nel XIX secolo era pressoché generalizzato il rifiuto dell'infinito attuale. Due esempi, fra i tanti che si potrebbero fornire:

- il grande Carl Friedrich Gauss (1777-1855), il "principe dei matematici", così si esprimeva: «*Così io protesto contro l'uso di una grandezza infinita come compiutamente data, il che in matematica non è mai permesso*»;

[1] Euclide, *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Milano, Bompiani, pagg. 1212-1213

- stesso concetto espresso dal francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912): «*Non esiste un infinito attuale; ciò che noi chiamiamo infinito è soltanto la possibilità di creare incessantemente nuovi oggetti, per quanto numerosi siano gli oggetti già creati*».

In realtà, bisogna riconoscere che fino agli anni 70 del secolo XIX si parlava di "infinito" senza sapere esattamente di cosa si parlasse.

C'è stato, in verità, nel XVII secolo, un momento in cui un famoso scienziato avrebbe potuto chiarire il concetto, ma non lo fece: si trattò di Galileo Galilei (1564-1642), il quale nell'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) – ragionando sul fatto che la corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e i loro quadrati faccia pensare che entrambi i raggruppamenti contengano la stessa quantità di "oggetti", ma che tuttavia è indubbio, secondo Galileo, che ci sono più numeri naturali che quadrati – per spiegare quello che per lui era un paradosso, così scrisse:

«*Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate*».

Circa due secoli dopo, nel 1872, il matematico tedesco Richard Dedekind (1831-1916) fece quel salto di qualità che Galileo non fu capace di fare, vedendo una proprietà universale degli insiemi infiniti in quello che Galileo considerava un paradosso. Egli, infatti, fornì la seguente definizione di insieme infinito, che fu accettata da tutti i matematici e che in una terminologia moderna così suona:

*Un insieme è **infinito** se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

Se questo è impossibile l'insieme è ***finito***.

Ma esistono realmente insiemi che si possano mettere in corrispondenza biunivoca con una loro parte propria?

Esistono, e l'insieme dei numeri naturali ne è un esempio. Abbiamo visto infatti che lo stesso Galileo aveva notato che può essere messo in corrispondenza biunivoca con i suoi quadrati, che chiaramente costituiscono una parte propria dell'insieme dei numeri naturali.

Ma questo fatto non è eccezionale. Si ripete, infatti, in molte situazioni; come, per esempio, quando si considerano: l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri pari oppure l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri dispari oppure ancora l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri primi e altri casi analoghi.

Ma addirittura è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e l'insieme $\mathbb{Q}^+$ dei razionali non negativi.

S'intuisce poi – ma se ne potrebbe dare una dimostrazione – che:

- *ogni insieme che si può mettere in corrispondenza biunivoca con un insieme infinito è esso pure infinito,*
- *ogni insieme che contiene come parte propria un insieme infinito è infinito.*

Queste proprietà sono utili giacché permettono di spiegare immediatamente perché sono infiniti i seguenti insiemi:

- numeri naturali pari;
- numeri naturali dispari;
- multipli di un qualunque numero naturale n diverso da 0;
- quadrati dei numeri naturali;
- numeri interi;
- numeri razionali;
- numeri reali;
- numeri complessi.

3. Una volta accertata e accettata l'esistenza di insiemi infiniti, un matematico geniale si pose il problema di stabilire se fosse possibile confrontarli.

Galileo, nell'opera sopraccitata, aveva puntualizzato che questo non era possibile, affermando che:

«*gli attributi di maggiore minore o eguale non aver luogo*
non solamente tra gl'infiniti, ma né anco tra gl'infiniti e i finiti».

Il nostro genio non era d'accordo.

Egli ebbe bisogno di ampliare la nomenclatura di cui disponeva. Vediamo come.

Formulò una prima definizione:

Quando tra due insiemi A e B è possibile stabilire una *corrispondenza biunivoca*,
si dice che A e B sono ***equipotenti***.

Il nostro genio, per la verità, usa il termine *coordinabili* al posto di *equipotenti*.

È evidente che due insiemi **finiti** equipotenti allora hanno lo stesso numero di elementi: questo numero si chiama **potenza** (o **cardinalità**) di ciascuno dei due insiemi.

La potenza di un insieme A si indica con una delle seguenti scritture: **|A|**, **card(A)**.

Ma se ad essere equipotenti sono due insiemi **infiniti**?

Ovviamente in questo caso non ha senso dire che hanno lo stesso numero di elementi, giacché gli elementi sono appunto in numero infinito e quindi non è possibile contarli. Ebbene, il nostro genio superò questo limite, creando una nuova categoria di numeri, i cosiddetti ***numeri transfiniti***.

Ma procediamo con ordine.

Ogni insieme equipotente all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si dice che **ha la potenza del numerabile** o **la cardinalità del numerabile**. O, più semplicemente, si dice che l'insieme è **numerabile**.

Ovviamente la potenza del numerabile non è un numero naturale, per cui nessun numero naturale può rappresentarla. Il nostro genio la chiamò ***numero transfinito*** ed inventò un simbolo per rappresentarlo, il seguente:

$$\aleph_0$$

che si legge "*aleph con zero*" (*aleph* è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

Da quanto precede si desume che oltre ad $\mathbb{N}$ sono numerabili molti altri insiemi. Come, per esempio: naturali pari; quadrati dei naturali; numeri primi; razionali assoluti; eccetera.

Inoltre, si dimostra che sono numerabili gli insiemi $\mathbb{Z}$ degli interi relativi e $\mathbb{Q}$ dei razionali.

Il nostro genio andava esaminando la cardinalità dei vari insiemi infiniti non esattamente per diletto, ma perché, in realtà, cercava di capire se ce se fosse qualcuno di cardinalità maggiore.

Fino ad ora, nonostante avesse preso in esame molti insiemi, non ne ha trovato alcuno che fosse infinito senza essere equipotente ad $\mathbb{N}$. Gli sorse legittimamente un dubbio:

Tutti gli insiemi infiniti hanno forse la stessa potenza?

Come dire, seppure in termini grossolani:

Gli insiemi infiniti sono infiniti allo stesso modo e non c'è altro da aggiungere?

In verità molti, se non addirittura tutti i matematici, la pensarono così fino agli ultimi anni dell'Ottocento. Abbiamo riportato sopra il pensiero di Galileo. Ma era il pensiero di tutti i matematici.

Sennonché il solito genio matematico sparigliò il campo, riuscendo a stabilire una gerarchia tra i molteplici insiemi infiniti.

Egli dimostrò anzitutto il seguente teorema, inventando un procedimento dimostrativo che sarebbe stato denominato ***procedimento diagonale*** (o ***metodo diagonale***). Si capirà fra qualche rigo il perché di questa denominazione.

♦ TEOREMA. **L'insieme dei numeri reali è più che numerabile.**

La dimostrazione del teorema è basata sul seguente criterio, di cui però non fornisco la dimostrazione:

♦ CRITERIO. **Se S è un insieme equipotente ad un sottoinsieme di un insieme T ma non è equipotente a T allora la potenza di S è minore della potenza di T.**

DIMOSTRAZIONE del teorema.

Basta dimostrare che un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali non è numerabile ma contiene un sottoinsieme che è numerabile. A questo riguardo scegliamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$: $J=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}$, vale a dire l'intervallo $[0,1]$ dei numeri reali compresi fra 0 e 1 inclusi.

Che esso contenga un sottoinsieme numerabile è banale; è sufficiente considerare l'insieme:

$$\left\{x \;\middle|\; x=\frac{1}{n},\ n\in N_0\right\}.$$

Per dimostrare invece che J non è numerabile osserviamo preliminarmente che ogni elemento di questo intervallo può mettersi sotto forma di allineamento decimale illimitato con parte intera nulla e, viceversa, ogni allineamento decimale illimitato con parte intera nulla è un numero di quell'intervallo.

Cioè, detto α un tale numero: $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots$, dove gli a_i ($i \in \mathbb{N}$) sono numeri interi tali che $0 \leq a_i \leq 9$.

In particolare: 0=0,0000…, 1=0,9999… .

Adesso, per dimostrare che l'insieme J non è numerabile, ragioniamo per assurdo, supponendo che invece sia numerabile. Questo implica che è possibile disporre i suoi elementi in modo che risulti evidenziata una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi $\mathbb{N}$ e J. Ammettiamo allora che la disposizione sia la seguente:

$$\alpha_0 = 0, a_{00}\ a_{01}\ a_{02}\ a_{03} \cdots\cdots$$
$$\alpha_1 = 0, a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots\cdots$$
$$\alpha_2 = 0, a_{20}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots\cdots$$
$$\alpha_3 = 0, a_{30}\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Di modo che sarebbe $J = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Ciò significa che non esiste alcun allineamento decimale illimitato con parte intera nulla che non appartenga all'insieme $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Per cui, se riusciamo a costruire un tale allineamento, ma non appartenente a quest'insieme, avremo provato l'assurdo. Ora, in effetti, un allineamento siffatto si può costruire. Per questo bisogna:

a) considerare dapprima il seguente numero $\alpha = 0, a_{00} a_{11} a_{22} a_{33} \ldots$, ottenuto con le cifre della *diagonale principale* dei numeri α_i (sono evidenziati in rosso nella rappresentazione dei numeri);

b) costruire quindi il numero $\beta = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots$ tale che ogni b_i sia diverso da a_{ii}. Ossia, per esteso:

$$b_0 \neq a_{00}\ ;\quad b_1 \neq a_{11}\ ;\quad b_2 \neq a_{22}\ ;\quad b_3 \neq a_{33}\ ;\ \ldots .$$

Il numero β appartiene certamente all'intervallo [0,1] ma non all'insieme $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Esso, infatti, è diverso da ogni α_k, dove $k \in \mathbb{N}$, poiché tali due numeri differiscono almeno per la cifra decimale di posto $k+1$.

L'insieme [0,1] è dunque più che numerabile e, di conseguenza, per il criterio suddetto, l'insieme dei reali è più che numerabile.

Ogni insieme equipotente all'insieme dei numeri reali si dice che ha la ***potenza del continuo*** o che ha la ***cardinalità del continuo***. O, più semplicemente, si dice che è ***continuo***.

Il "continuo" è il secondo numero transfinito trovato dal nostro genio. Lo indichiamo con il simbolo

$$\mathbf{C}.$$

4. Poiché l'appetito vien mangiando, il nostro genio continuò ad indagare al fine di **stabilire se esistono insiemi infiniti più che continui**.

Incominciò con la retta dei numeri reali.

Questa retta è concepita come immagine dell'insieme dei numeri reali, nel senso che ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale e, viceversa, ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta. Questo significa che la potenza dell'insieme dei punti della retta numerica è ancora il "continuo".

Si può poi dimostrare che tutti i segmenti, quale che sia la loro lunghezza, che siano chiusi, aperti o semiaperti, sono non solo equipotenti fra loro ma sono equipotenti alla retta completa. E inoltre che tutte le rette sono equipotenti.

Qui ci limitiamo a fornire una dimostrazione (ne esistono altre) del fatto che:

Una retta ed un segmento (aperto) sono equipotenti.

Per questo prendiamo una semicirconferenza di centro O e diametro AB e la retta r tangente ad essa e parallela ad AB (figura 2).

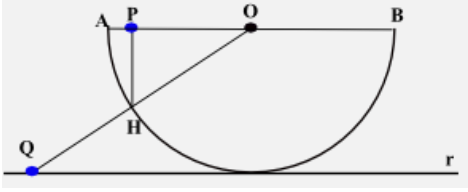


figura 2

Preso P∈]AB[e condotta per esso la perpendicolare alla retta AB, sia H il punto in cui questa interseca la semicirconferenza e sia Q il punto in cui la retta OH interseca la retta r.

Questa costruzione, che s'inverte facilmente, associando P e Q evidenzia una corrispondenza biunivoca tra i punti di]AB[e quelli di r. Pertanto il segmento e la retta sono equipotenti.

In conclusione: un segmento aperto (di retta reale, si capisce) ha tanti punti quanti sono i numeri reali.

Ha pertanto la potenza del continuo.

Per la cronaca, nella dimostrazione è anche implicito che la retta è equipotente alla semicirconferenza.

Una volta esaurite le ricerche riguardo alla retta, il nostro genio prese in considerazione il piano, ma giunse alla seguente conclusione:

Il piano ha la potenza del continuo.

Ecco la dimostrazione di un teorema preliminare.

♦ TEOREMA. **L'insieme dei punti di un quadrato unitario ha la potenza del continuo.**

DIMOSTRAZIONE.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), consideriamo il quadrato unitario costruito sui lati OU ed OV, dove U(1,0) e V(0,1) (figura 3). È sufficiente dimostrare che questo quadrato è equipotente al segmento OU, che, come noto, ha la potenza del continuo.

Dimostriamo anzitutto che ad ogni punto P del quadrato corrisponde uno ed un sol punto Q del segmento. Le coordinate cartesiane di P sono due numeri reali a, b che si possono scrivere sotto forma di allineamenti decimali illimitati:

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots , \qquad b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots .$$

Possiamo allora costruire il numero reale α tale che sia:

$$\alpha = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \ldots .$$

Esso è certamente compreso fra 0 e 1. Cosicché il punto Q di ascissa α appartiene al segmento OU.

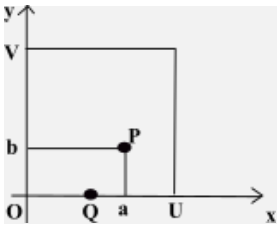


figura 3

Facciamo vedere adesso che a Q corrisponde P. Per questo, ammesso che Q abbia ascissa α tale che sia:

$$\alpha = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \ldots ,$$

basta prendere le coordinate (a, b) di P in modo che sia:

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots , \qquad b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots .$$

Per esempio, se $a = 0{,}3579\ldots$ e $b = 0{,}2468\ldots$ allora $\alpha = 0{,}32547698\ldots$; al contrario, se $\alpha = 0{,}54930132\ldots$ allora $a = 0{,}5903\ldots$ e $b = 0{,}4312\ldots$.

Dopo questa memorabile scoperta, il nostro genio esclamò: «*Lo vedo, ma non lo credo*», tanto stupefacente gli pareva ciò che aveva dimostrato.

A questo punto, come si dimostra che un segmento ha la stessa potenza della retta completa, allo stesso modo si può dimostrare che un quadrato ha la stessa cardinalità del piano completo.

Ne discende che il piano completo ha la potenza del continuo.

In realtà, il nostro genio andò addirittura oltre, dimostrando, con un procedimento simile al precedente, che:

Lo spazio ha la potenza del continuo.

5. Sembrava, dunque, che non si riuscisse a superare la potenza del continuo. Ma il nostro genio non si arrese. Finalmente giunse a dimostrare il seguente teorema, che apriva le porte ad una vera e propria sinfonia di numeri transfiniti.

♦ TEOREMA. **Per ogni insieme A, l'insieme P(A) delle parti di A ha una potenza maggiore della potenza di A**.

DIMOSTRAZIONE.

Rammentando il criterio enunciato prima, basta provare che A è equipotente ad un sottoinsieme di P(A) ma non è equipotente ad A. La prima parte è immediata: basta considerare l'insieme $B \subset P(A)$ tale che

$$B = \{x \mid x=\{a\}, a \in A\};$$

si comprende facilmente che la relazione, che ad ogni $a \in A$ associa $\{a\} \in B$, è una corrispondenza biunivoca tra A e B. Per cui effettivamente A è equipotente ad un sottoinsieme di P(A).

La dimostrazione che A non è equipotente a P(A) è un po' più complicata. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che A sia equipotente a P(A). Allora esiste almeno una funzione biiettiva F che ad ogni $x \in A$ associa $F(x) \in P(A)$.

Consideriamo adesso il seguente sottoinsieme di P(A):

$$E = \{x \mid x \in A, x \notin F(x)\}.$$

Esso è certamente associato ad un determinato $x_0 \in A$; cioè: $E=F(x_0)$.

Sono possibili due casi, a seconda che x_0 appartenga o no a $F(x_0)$. Esaminiamoli:

1) $x_0 \in F(x_0)$: di conseguenza $x_0 \notin E$ e quindi, poiché $E=F(x_0)$, allora $x_0 \notin F(x_0)$;

2) $x_0 \notin F(x_0)$: di conseguenza $x_0 \in E$ e quindi, poiché $E=F(x_0)$, allora $x_0 \in F(x_0)$.

In entrambi i casi si giunge ad un assurdo. Quindi è falsa l'ammissione che A sia equipotente a P(A).

In conclusione, A è equipotente ad un sottoinsieme di P(A) ma non è equipotente ad A. Pertanto, come si voleva dimostrare, la potenza di P(A) è maggiore di quella di A.

Ora, com'è noto, se un insieme finito ha n elementi, l'insieme delle sue parti ne ha 2^n ed è $2^n > n$.

Questa proprietà si estende anche agli insiemi infiniti. Ragion per cui, in generale, possiamo affermare che:

L'insieme delle parti di un qualunque insieme A ha potenza uguale a $2^{|A|}$

dove con |A| stiamo indicando, come già precisato, la potenza di A.

Risulta di conseguenza che:

$$2^{|A|} > A\,.$$

Si può costruire, a questo punto, tutta una successione di **numeri cardinali transfiniti**, disposti in ordine strettamente crescente:

$$\aleph_0,\quad 2^{\aleph_0}=\aleph_1,\quad 2^{\aleph_1}=\aleph_2,\quad 2^{\aleph_2}=\aleph_3,\quad \ldots\,.$$

Con essi il nostro genio costruì una vera e propria aritmetica che è detta appunto ***aritmetica dei transfiniti*** e presenta molte e sostanziali differenze con l'aritmetica dei numeri cardinali finiti.

Conto di occuparmene in un prossimo articolo.

Ovviamente si ponevano due interrogativi fondamentali:

1) Esistono cardinali transfiniti fra il numerabile ed il continuo?

2) La potenza del continuo coincide con uno di questi numeri cardinali transfiniti oppure è un transfinito diverso?

Il nostro genio, nonostante molti tentativi, condotti per anni e anni, non riuscì a fornire una dimostrazione che desse una risposta ai due interrogativi, ma convinto che un insieme intermedio fra il numerabile e il continuo non esista, si limitò a formulare la seguente congettura, che è nota come ***ipotesi del continuo***:

Non esiste un cardinale transfinito compreso tra il numerabile ed il continuo.

Come conseguenza di questa congettura si desume che **la potenza del continuo necessariamente deve coincidere con il transfinito $\aleph_1$**. Dunque:

$$\mathbf{C} = 2^{\aleph_0}\,.$$

6. Il genio matematico del quale stiamo parlando non è una finzione letteraria né un gruppo di persone, ma una singola persona reale, una persona che dal nulla ha costruito un edificio imponente: si è certamente capito che stiamo parlando di Georg Cantor, l'inventore della teoria degli insiemi.

Qualche cenno sulla sua vita e le sue opere.

Georg Cantor, più precisamente Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nacque il 3 marzo 1845, in Russia, a San Pietroburgo, e morì in Germania, ad Halle, il 6 gennaio 1918.

Il padre era un commerciante originario della Danimarca, mentre la madre, nata in Russia, era di origini austriache. Entrambi i genitori di Georg erano di religione cristiana, ma il padre era luterano e la madre cattolica. I loro antenati invece sembra che fossero ebrei. Vivevano a San Pietroburgo. A causa della salute cagionevole del padre, la famiglia, alla ricerca di un clima meno rigido, nel 1856, quando Georg aveva 11 anni, si trasferì in Germania e, dopo aver girovagato per diverse città, alla fine si stabilì a Berlino.

Georg fece i suoi primi studi dapprima nelle scuole tedesche e in seguito in Svizzera, dove nel 1862 fu iscritto al prestigioso Politecnico Federale di Zurigo. Vi rimase, per la verità, solo un anno giacché, in seguito alla morte del padre, fece ritorno a Berlino e qui, nel 1863 si iscrisse all'Università di questa città. Ebbe come maestri dei celebri matematici, quali Ernst Eduard Kummer (1810-1893) per l'indirizzo algebrico, Leopold Kronecker (1823-1891) per l'indirizzo numerico e Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) per l'indirizzo analitico. Conseguì la laurea nel 1867.

Nei due anni successivi pubblicò in tedesco, sulla *Rivista di matematica e fisica*, che si stampava a Lipsia, i suoi primi lavori, tre articoli, il primo pubblicato nel 1868 e gli altri due l'anno dopo, nel 1869. In questi ultimi si intravedono germi di quello che sarebbe stato il suo cavallo di battaglia: la teoria dell'infinito.

In questo periodo, per guadagnarsi da vivere, dava lezioni di Matematica in un collegio femminile.

Nello stesso anno 1869 ottenne un posto come Professore incaricato nell'Università di Halle. Accettò l'incarico, ma il suo desiderio, la sua principale aspirazione, era di poter un giorno insegnare a Berlino o a Gottinga, sedi di Università ben più importanti di quella di Halle, per la loro reputazione, Ad Halle, comunque, tre anni dopo, fu confermato come Professore straordinario.

Ad Halle Cantor ebbe come guida Heinrich Eduard Heine (1821-1881), il quale, da allievo di Weierstrass, lo indirizzò verso le ricerche nel campo dell'Analisi Matematica.

Sulla strada di queste ricerche, Cantor pubblicò cinque articoli che lo avrebbero convinto della necessità di affrontare il problema degli insiemi infiniti.

Chiariscono bene il concetto due frasi tratti da un libro di John N. Crossley e altri [(2)].

«*È importante sottolineare che Cantor è giunto alla teoria degli insiemi partendo da un problema specifico dell'analisi. Egli non stava cercando di definire i numeri naturali né qualche altro problema per risolvere il quale, da allora, si fa uso della teoria degli insiemi. La sua motivazione originaria fu l'analisi degli insiemi infiniti dei numeri reali*.»

Cantor, sulla scia degli studi di Bolzano e Weierstrass, si rese conto che «*per trattare adeguatamente derivate e integrali si dovevano considerare insiemi infiniti e bisognava considerarli in modo molto preciso: non ci fu modo di evitare gli insiemi infiniti. Ecco l'origine della teoria degli insiemi*.»

Ma Cantor andò oltre lo stadio dei problemi dell'Analisi e finì per occuparsi ed appassionarsi allo studio in sé degli insiemi infiniti, come l'ho indegnamente e parzialmente descritto nei paragrafi precedenti.

La ***teoria degli insiemi*** fu fondata da Cantor tra il 1878 e il 1884 con una serie di sei memorie pubblicate sulla rivista *Mathematische Annalen*. Già in esse c'è qualche cenno all'infinità più che numerabile dei numeri reali, ma non c'è ancora la celebre dimostrazione con il *procedimento diagonale*.

Dimostrazione che è invece presente in un lavoro del 1892, dal titolo *Su di una questione elementare della teoria delle varietà*. (Per Cantor *varietà* era sinonimo di *insieme*.)

Più avanti, nel 1895 pubblicò la prima parte del suo lavoro sulla ***teoria dei numeri transfiniti***. La seconda parte fu pubblicata nel 1897.

Purtroppo, a causa delle sue ardite costruzioni concettuali, Cantor trovò il continuo ostracismo di quello che era stato un suo maestro e per un certo periodo anche un amico, Kronecker. Questi – ancorato com'era al concetto di *infinito potenziale* – giammai avrebbe accettato l'idea di *infinito attuale* che è insita nella creazione di Cantor.

---

[2] Cfr.: John N. Crossley e altri, *Che cos'è la logica matematica?*, Torino, Torino, Boringhieri, 1979, pag. 11.

L'idea fondamentale di Kronecker era che solo i numeri interi avessero diritto di cittadinanza. Tutto il resto esiste solo se può essere definito operando sui numeri interi mediante una serie finita di passaggi; altrimenti non esiste. Il suo pensiero si riassume nel seguente celebre aforisma:

«*Dio creò i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo*.»

L'ostilità manifesta di Kronecker, che addirittura accusò Cantor di essere un "ciarlatano scientifico", un "rinnegato", un "corruttore della gioventù", fu anche il motivo per cui Cantor non poté vedere realizzato il suo sogno di insegnare a Berlino o a Gottinga.

Giusto per avere un'idea delle manovre di Kronecker contro Cantor, è emblematico un episodio. Nel 1877 Cantor scrisse l'articolo *Un contributo alla teoria delle varietà* e lo inviò alla prestigiosa *Rivista di Crelle*.

Veniva affrontato per la prima volta il problema del confronto tra due insiemi infiniti, ma non come strumento per altri risultati, com'era stato fino a quel momento, bensì come tema autonomo, a sé stante.

Per l'epoca in cui venivano proposti questi arditi concetti, l'articolo era sconvolgente e la sua pubblicazione fu ritardata di un anno, e questo avvenne soprattutto per l'opposizione di Kronecker, che cercò con ogni mezzo di impedire la pubblicazione, non solo di quest'opera, ma di tutti i lavori di Cantor. In realtà non ci riuscì.

L'ostracismo di Kronecker, tuttavia, unito però a gravi problemi familiari (la morte dapprima della madre, cui era molto affezionato, poi di un fratello, infine di un figlio), portò Cantor a lunghi periodi di depressione con ricoveri più o meno brevi nella clinica psichiatrica di Halle. Ebbe il primo attacco, una profonda depressione, nel 1884. La conseguenza fu che Cantor abbandonò ogni ricerca matematica per cinque lunghi anni.

Ma si riprese e, come abbiamo visto sopra, pubblicò altri importanti lavori, tra il 1892 e il 1897.

Fu pure eletto presidente della neonata Unione Matematica Tedesca. Carica che ricoprì dal 1890 al 1893.

Partecipò anche, sebbene saltuariamente, ad alcuni congressi di Matematica e, pur con lunghi periodi di aspettativa, continuò ad insegnare.

La depressione, purtroppo, non gli diede tregua e i ricoveri nella clinica psichiatrica si susseguirono con una certa frequenza, fino a costringerlo, nel 1913, ad abbandonare ogni incarico.

Nella clinica psichiatrica di Halle fu ricoverato per l'ultima volta nel giugno del 1917 e vi morì il 6 gennaio 1918 per un attacco cardiaco.

Detto della posizione di Kronecker, c'è da dire che non tutti la pensavano come lui, e anzi vi furono di quelli che accettarono con entusiasmo la costruzione di Cantor e, fra questi, certamente il matematico tedesco David Hilbert (1862-1943). Nella sua opera dal titolo *Sull'infinito* (1925) è presente la celebre esclamazione:

«*Nessuno ci caccerà mai dal paradiso che Cantor ha creato per noi*».

Più recentemente, il matematico e divulgatore scientifico Martin Gardner (1914-2010) ebbe modo di dichiarare in una sua opera (1975) quanto segue:

«*Oggi le dimostrazioni di Cantor sono universalmente riconosciute*
tra le più brillanti e belle della storia della matematica».

BIBLIOGRAFIA.

[1] Eric T. Bell, *I grandi matematici*, traduzione di Dina Aduni, Firenze, Biblioteca Sansoni, 1966, pagg. 560-584.

[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, traduzione di Adriano Carugo, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980, pagg. 648-655.

[3] Antonino Giambò*, La prova di matematica nei concorsi di scuola media*, Torino, S.E.I. 1988, pagg.138-143

[4] Antonino Giambò – Roberto Giambò, *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora Editrice, 2005, pagg. 321-376, 362-363.

[5] Gustavo Ernesto Piñeiro, *Cantor: la formalizzazione del concetto di infinito*, Milano, RBA Italia, 2017.

[6] John E. Yarnelle, *Introduzione alla matematica del transfinito*, traduzione di Giampiero Borella, Milano, Progresso Tecnico Editoriale, 1967.

[7] Sito web matematicagratuitaperscuolesuperiori: Testo base, U54 – *Insiemi numerici e infinito*.