PROBLEMA _2

Un'azienda deve progettare un contenitore metallico a forma di cilindro circolare retto, aperto superiormente, che deve avere un volume costante $V = 128\pi$ cm³. Per minimizzare i costi di produzione, è necessario che la superficie totale del contenitore (base + superficie laterale) sia la minima possibile.

a) Esprimere l'area $\boldsymbol{S}$ della superficie totale del contenitore in funzione del raggio della base . Determinare il dominio della funzione in coerenza con il contesto del problema.

b) Utilizzando gli strumenti del calcolo differenziale, determinare le dimensioni (raggio e altezza) che rendono minima la superficie . Verificare che, in corrispondenza del minimo, l'altezza del cilindro è uguale al raggio della base.

   Descrivere l'andamento della funzione determinata al *punto a* (limiti agli estremi del dominio, monotonia e concavità) e tracciarne un grafico qualitativo.

c) Si supponga ora che il costo del materiale per la base sia C_be quello per la superficie laterale sia C_l. Dimostrare che il costo minimo si ottiene quando il rapporto tra altezza e raggio soddisfa la relazione: $\frac{h}{r} = \frac{C_b}{C_l}$

d) Effettuare un confronto tra il grafico della funzione $\boldsymbol{S}\ (r)$ studiata precedentemente e il suo prolungamento in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. La funzione così prolungata ammette ancora un minimo assoluto?

Soluzione

a. **Modellizzazione:**

Misura di lunghezza: cm ; *Misura di superficie : cm^2; Misura di volume : cm^3*

Il volume di un cilindro di raggio r e altezza h è uguale al prodotto dell'area di base per la misura dell'altezza

$$V = 128\pi = \pi r^2 \cdot h \rightarrow \quad h = \frac{128}{r^2}$$

$$S_{totale} = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi\left(r^2 + \frac{256}{r}\right)$$

Posto $r = \ x > 0$

$\boldsymbol{S(x) = \pi\left(x^2 + \frac{256}{x}\right)}$ **Dominio** $\boldsymbol{x > 0}$

b) **Ottimizzazione:** $S'(x) = \pi\left(2x - \frac{256}{x^2}\right) = 2\pi\frac{x^3-128}{x^2} = 0 \rightarrow x = 4\sqrt[3]{2}$

x	0 $4\sqrt[3]{2}$	
$S'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + + + + + + + + + +
$S(x)$	↘	↗

$S(x)$ assume il valore minimo in corrispondenza di $\boldsymbol{r = x = 4\sqrt[3]{2}}$

Corrispondente valore dell'altezza $\boldsymbol{h = \frac{128}{r^2} = \frac{128}{16\sqrt[3]{4}} = \frac{8}{\sqrt[3]{64}}\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{2}}$

Risulta verificato che in corrispondenza del minimo, l'altezza del cilindro sia uguale al raggio della base.

$$\boldsymbol{S_{minima} = \pi\frac{128+256}{4\sqrt[3]{2}} = \pi\frac{96}{\sqrt[3]{8}}\sqrt[3]{4} = \pi\frac{96}{2}\sqrt[3]{4} = \quad \pi \cdot 48\sqrt[3]{4} \approx 239,37\ cm^2}$$

Analisi e Grafico

Limiti agli estremi del dominio :

$$\lim_{x\to 0^+} \boldsymbol{\pi\left(x^2 + \frac{256}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \boldsymbol{\pi\left(x^2 + \frac{256}{x}\right)} = +\infty$$

Grafico qualitativo di $S(x)$

Studio del segno della derivata seconda $\boldsymbol{S''(x) = 2\pi\left(1 + \frac{256}{x^3}\right)}$ è positiva $\forall x > 0$

La funzione, positiva nell'intero dominio, decresce da valori infinitamente grandi fino al valore minimo , poi cresce verso l'infinito.

La concavità della curva è sempre rivolta verso l'alto, non ci sono punti di flesso

Il testo del problema non prende in considerazione l'intervallo limitato in cui dovrebbe essere compreso , realisticamente, il valore del raggio. L'andamento del grafico suggerisce che ciò è irrilevante per la determinazione del minimo assoluto.



Mantenendo fisso il volume, l'altezza è inversamente proporzionale al quadrato del raggio.

Se il raggio tende a 0 l'altezza tende a $+\infty$ e anche la superficie ($cilindro\ molto\ alto\ e\ stretto$).

Se il raggio tende a $+\infty$ l'altezza tende a 0 e l'area di base tende a $+\infty$ ($cilindro\ molto\ largo\ e\ schiacciato$).

c) Generalizzazione

$$C_{totale} = C_b \cdot \pi r^2 + C_l \cdot 2\pi rh \qquad \boldsymbol{S(x) = \pi\left(C_b x^2 + C_l \frac{256}{x}\right)}$$

La derivata prima $\pi\left(2C_b x - C_l \frac{256}{x^2}\right)$ si annulla per $x = 4\sqrt[3]{2\frac{C_l}{C_b}}$, valore al quale corrisponde un minimo per la funzione, analogamente al caso studiato nel punto b)

Il valore dell'altezza è $h = \frac{128}{r^2} = \frac{128}{16\sqrt[3]{4}}\left(\frac{C_b}{C_l}\right)^{\frac{2}{3}} = 8\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{C_b}{C_l}\right)^{\frac{2}{3}}$

Il rapporto $\boldsymbol{\frac{h}{r}}$ assume il valore

$$\boldsymbol{8\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{C_b}{C_l}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{C_b}{2C_l}} = 2\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \left(\frac{C_b}{C_l}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{C_b}{C_l}\right)^{\frac{1}{3}} =}$$

$$\boldsymbol{= \quad 2\left(\frac{C_b}{C_l}\right)^{\frac{3}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{C_b}{C_l}}$$

d) Prolungamento della funzione

Si consideri la funzione $\boldsymbol{f(x) = \pi\left(x^2 + \frac{256}{x}\right)}$ di cui $S(x)$ è una restrizione all'intervallo $]0, +\infty[$

Il suo dominio è $]-\infty, 0[\quad \cup \quad]0, +\infty[$

Segno

$$\boldsymbol{\pi\left(x^2 + \frac{256}{x}\right) = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{256} = -4\sqrt[3]{4} \approx -6{,}35}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \quad x = -4\sqrt[3]{4}$$

$$f(x) > 0 \rightarrow \quad x < -4\sqrt[3]{4} \quad \cup x > 0$$

$$f(x) < 0 \rightarrow \quad -4\sqrt[3]{4} \ < x < 0$$

Comportamento alla frontiera del dominio- Asintoti

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

La retta di equazione $\boldsymbol{x = 0}$ (asse delle ordinate) è asintoto verticale destro e sinistro per $f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}} = -\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali, né obliqui .

Esiste una parabola asintotica , di equazione $y = \pi x^2$ in quanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x^2} + \frac{\boldsymbol{256}}{\boldsymbol{x}}\right) - \boldsymbol{\pi x^2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \boldsymbol{\pi}\frac{\boldsymbol{256}}{\boldsymbol{x}} = 0$$

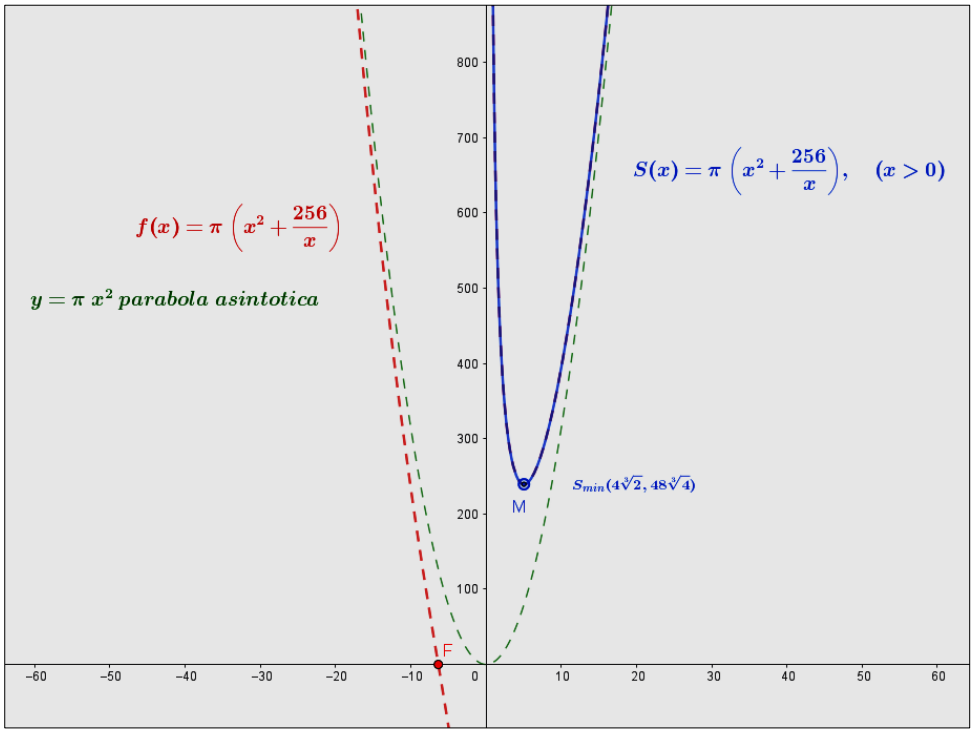
Monotonia e concavità

$f'(x) = \pi\left(2x - \frac{256}{x^2}\right) = 0 \to \boldsymbol{x = 4\sqrt[3]{2}} \qquad f'(x) > 0 \to x > 4\sqrt[3]{2}$

$f''(x) = 2\pi\left(1 + \frac{256}{x^3}\right) = 0 \to x = -4\sqrt[3]{4} \qquad f''(x) > 0 \to x < -4\sqrt[3]{4} \quad \cup \quad x > 0$

x	$-4\sqrt[3]{4}$	0	$4\sqrt[3]{2}$	
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - -	+ + + + + + +
$f"(x)$	+ + + + + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + +	+ + + + + + +
$f(x)$	Decrescente convessa	Decrescente concava	Decrescente convessa	Crescente convessa

Minimo relativo $(\boldsymbol{4\sqrt[3]{2},\ \pi \cdot 48\sqrt[3]{4}})$ **Flesso**$(-4\sqrt[3]{4}, 0)$



	$f(x)$	$S(x)$
Dominio	$R\backslash\{0\}$	R^+
Segno	Positiva per $x < -4\sqrt[3]{4} \quad \cup x > 0$ Negativa per $-4\sqrt[3]{4} \ < x < 0$	Positiva nel dominio
Asintoti rettilinei	La retta $\boldsymbol{x = 0}$ è asintoto verticale destro e sinistro	La retta $\boldsymbol{x = 0}$ è asintoto verticale destro
Parabola asintotica	$y = \pi x^2$	Si avvicina asintoticamente solo al ramo della parabola appartenente al primo quadrante.
Monotonia	Decrescente per $x < 0 \ \cup$ $0 < x < \ 4\sqrt[3]{2}$ Crescente per $x > \ 4\sqrt[3]{2}$	Decrescente per $0 < x < \ 4\sqrt[3]{2}$ Crescente per $x > \ 4\sqrt[3]{2}$
Estremi relativi o assoluti	**Minimo relativo** nel punto di ascissa $x = 4\sqrt[3]{2}$ Non ammette né massimo , né minimo assoluto	**Minimo relativo e assoluto** nel punto di ascissa $x = 4\sqrt[3]{2}$ Non ammette massimo assoluto
Concavità e flessi	Concavità verso l'alto per $x < -4\sqrt[3]{4} \ \cup \ x > 0$ Verso il basso in $]-4\sqrt[3]{4} \ , \ 0[$ **Flesso** $(-4\sqrt[3]{4} \ , \ 0)$	Concavità verso l'alto Non ci sono flessi

Suggerimenti per l'approfondimento teorico:

Approfondimento: Estremi relativi e assoluti. Teorema di Fermat e Teorema di Weierstrass.

Collegamento: Ottimizzazione-Problemi classici: es. Il problema isoperimetrico-Il problema di Erone.

Esempi di fenomeni fisici che obbediscono a principi di massimo o di minimo.