PROBLEMA _1

Sia data la funzione definita in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x^2+1} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

a) Determinare i parametri a e b sapendo che la funzione ha un valore massimo pari a 4 e che l'asintoto orizzontale è la retta $y = 1$.
b) Studiare la funzione $f(x)$ così ottenuta, determinandone l'insieme immagine, le eventuali simmetrie, gli intervalli di monotonia e concavità.
Spiegare perché f non è invertibile nel suo intero dominio ma sono invertibili le restrizioni di f su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (determinare in tal caso la funzione inversa) .
c) Si consideri la regione di piano S delimitata dal grafico di $f(x)$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$. Calcolare l'area di S.
d) Calcolare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa della regione S attorno all'asse y.

SOLUZIONE

La funzione $f(x)$ è una funzione algebrica razionale fratta, definita in R per qualunque valore dei due parametri. E' simmetrica rispetto all'asse y, essendo $f(-x) = f(x)$.

a) Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, l'asintoto orizzontale è la retta $y = a$ che coincide con la retta di equazione $y = 1$ se $\boldsymbol{a = 1}$

Posto $$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+b}{x^2+1} = 1 + \frac{b-1}{x^2+1}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-2x(b-1)}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(0) = 0}$$

Discussione rispetto ai valori del parametro b :

$\boldsymbol{b = 1} \rightarrow f(x) = costante = 1$

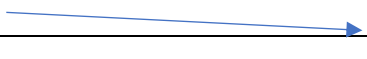
$\boldsymbol{b < 1} \rightarrow f(x) < 1$ tende asintoticamente a 1

x	0	
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$		

$f(0) = b < 1$ è punto di **minimo**

La condizione $\boldsymbol{b \leq 1}$ non è accettabile poiché non rispetta la condizione del valore massimo pari a 4.

$\boldsymbol{b > 1}$

x	0	
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - - - - - - -
$f(x)$		

$\boldsymbol{f(0) = b > 1}$ **è** punto di **massimo**

La funzione ha un valore massimo pari a 4 se $\boldsymbol{b = 4}$

b) La funzione $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}} = \mathbf{1} + \frac{3}{x^2+1} > \mathbf{1}$

- assume valori nell'intervallo $]1,4]$ (**insieme immagine**)
- è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate

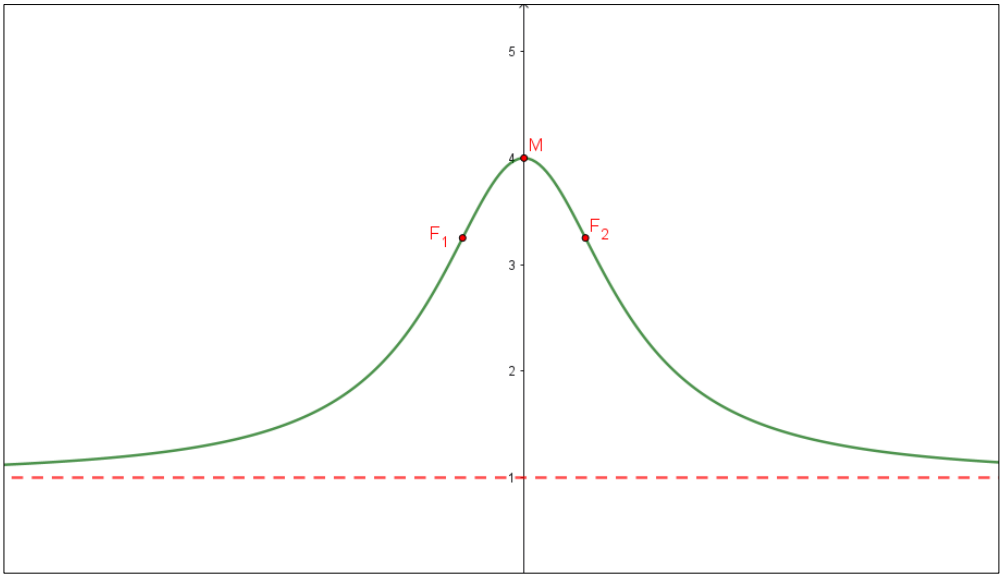
La derivata è $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$

La derivata seconda $f''(x) = \frac{6(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ ammette 2 zeri $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Intervalli di monotonia e concavità

x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$f'(x)$	+ + + + + + + + +	+ + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - -
$f''(x)$	+ + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + + + +
$f(x)$	Crescente convessa	Crescente concava	Decrescente concava	Decrescente convessa

I punti di coordinate $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{13}{4}\right)$ e $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{13}{4}\right)$ sono **flessi**



La funzione $f(x)$ non è iniettiva. Esplicitando la variabile x nell'equazione $y = \frac{x^2+4}{x^2+1}$ si ottiene $x = \pm\sqrt{\frac{4-y}{y-1}}$ con $1 < y \leq 4$.

Sono iniettive le restrizioni di f

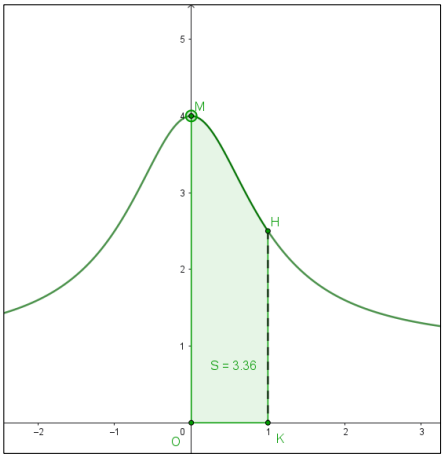
$f_1(x)$ nell'intervallo $[0, +\infty[$ $f_2(x)$ nell'intervallo $]-\infty, 0]$.

le quali definiscono una **corrispondenza biunivoca** tra il rispettivo dominio e l'insieme immagine $]1,4]$

Le due funzioni $g_1(y) = +\sqrt{\frac{4-y}{y-1}}$ e $g_2(y) = -\sqrt{\frac{4-y}{y-1}}$ sono le rispettive funzioni inverse

c) Calcolo dell'area del quadrilatero mistilineo $OMHK$

$$O(0,0) \qquad M(0,4) \qquad H\left(1,\frac{5}{2}\right) \qquad K(1,0)$$



$$\int_0^1 \left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)dx = [x+3\tan^{-1}x]_0^1 = \quad 1+3\frac{\pi}{4} \approx 3{,}36$$

d) Calcolo del volume solido di rotazione ottenuto ruotando la regione S di $360°$attorno all'asse y.

Il solido corrisponde all'unione di un cilindro di raggio $\overline{OK} = 1$ e altezza $\overline{HK} = \frac{5}{2}$ e del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse y, della regione di piano limitata dalla curva, dall'asse y e dalla retta $y = \frac{5}{2}$.

$$V = \pi \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} + \pi \int_{\frac{5}{2}}^{4} (g_1(y))^2\, dy$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{4} \frac{4-y}{y-1}dy = -\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left(1-\frac{3}{y-1}\right)dy = [-y+3\ln|y-1|]_{\frac{5}{2}}^{4}$$

$$= \left(-4+3\ln 3+\frac{5}{2}-3\ln\frac{3}{2}\right)$$

$$= (-4+\frac{5}{2}+3\ln 3-3\ln 3+3\ln 2) = -\frac{3}{2}+3\ln 2$$

$$V = \pi\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}+3\ln 2\right) = \pi(1+3\ln 2)$$

Suggerimenti per l'approfondimento teorico:

Approfondimento: Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Significato geometrico dell'integrale definito.

Collegamento: Simmetrie assiali. Funzioni simmetriche rispetto all'asse x, all'asse y o alle bisettrici degli assi cartesiani. Calcolo del volume di un solido. Principio di Cavalieri.