Quesiti di Analisi

6) Data la funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, determinare la derivata $F'(x)$ e studiare il segno della derivata seconda $F''(x)$ per individuare eventuali flessi.

Soluzione

Il quesito si risolve applicando il Teorema fondamentale del calcolo integrale , del quale sono verificate le ipotesi:

<<Se f è una funzione continua in $[a;\ b]$, si dice funzione integrale di f in $[a;\ b]$ la funzione: $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a;\ b]$.

$F(x)$ *è derivabile in* $[a;\ b]$ $F'(x) = f(x), \forall\ x \in [a;\ b]$.>>

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \rightarrow F'(x) = e^{-x^2} \rightarrow F''(x) = -2xe^{-x^2}$$

Studio della monotonia e della convessità di $F(x)$ mediante il segno di $F'(x) e\ di\ F''(x)$

x	0	
$F'(x)$	+ + + + + + + + + ++ + ++ +	+ + + + + + + + + ++ + + + + +
$F''(x)$	+ + + + + + + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - - - - - - - -
$F(x)$	Crescente convessa	Crescente concava

La funzione cambia concavità nell'intorno di $x = 0$

$F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt$ =0

Il punto $O(0,0)$ è punto di flesso

7. Il teorema di Lagrange , o del valor medio, afferma che se *f* è una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, e derivabile almeno in $]a, b[$, allora esiste almeno un punto *c* di $]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle condizioni previste non è soddisfatta, l'esistenza di tale punto non è garantita ma neppure negata.

Soluzione

Le ipotesi del teorema sono condizioni sufficienti per la validità della tesi , ma non necessarie.

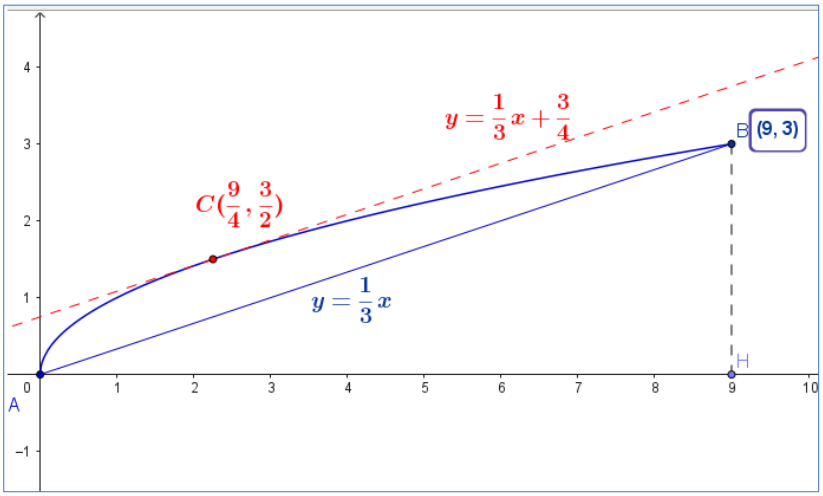
Significato geometrico dell'uguaglianza $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Al primo membro abbiamo il rapporto incrementale , al secondo la derivata della funzione calcolata in un punto dell'intervallo. Il significato geometrico della tesi del teorema è <<Esiste un punto interno all'intervallo $[a, b]$ in cui la tangente è parallela alla corda che congiunge gli estremi dell'arco di curva considerato.

Esempi

a) La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua nell' intervallo chiuso e limitato $[0,9]$

e derivabile nei punti interni (nel primo estremo non è derivabile, nel secondo esiste solo la derivata sinistra).



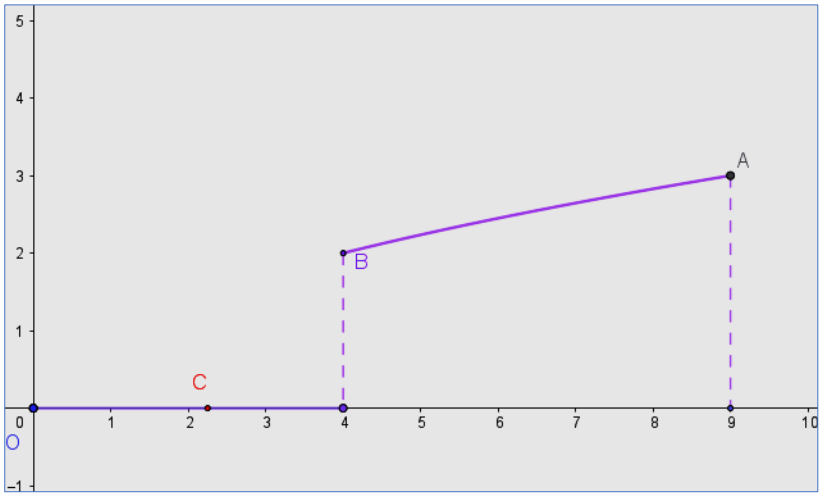
Essendo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ con $x > 0$ si verifica che $\exists c \in [0,9]$ $tale\ che$

$$f'(c) = \frac{f(9)-f(0)}{9-0} = \frac{1}{3} \rightarrow f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \rightarrow c = \frac{9}{4}$$

$$Il\ punto\ C\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{ è } il\ "punto\ di\ Lagrange"$$

b) La funzione $f_0(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 4 \\ \sqrt{x} & 4 \le x \le 9 \end{cases} \rightarrow f'_0(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 4 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 4 < x \le 9 \end{cases}$

non è continua nel punto di ascissa $x = 4$.



Il rapporto incrementale è sempre $\frac{f(9)-f(0)}{9-0} = \frac{1}{3}$

La derivata assume il valore **0** nel primo intervallo, è sempre minore di $\frac{1}{4}$ nel secondo.

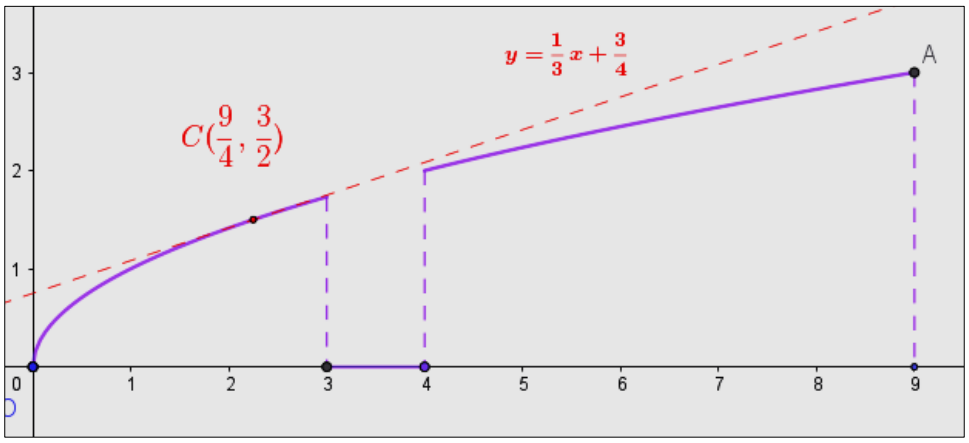
Il "*punto di Lagrange*" non esiste

c) La funzione $f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x < 3 \ \cup \ 4 < x \le 9 \\ 0 & 3 \le x \le 4 \end{cases} \rightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \le x < 3 \ \cup \ 4 < x < 9 \\ 0 & 3 < x < 4 \end{cases}$$

non è continua nel punti di ascissa $x = 3 \ e \ x = 4 \ rispettivamente$

.



Il rapporto incrementale è sempre $\frac{f(9)-f(0)}{9-0} = \frac{1}{3}$

$$Il\ punto\ C\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)\ \text{è}\ il\ "\ punto\ di\ Lagrange"$$

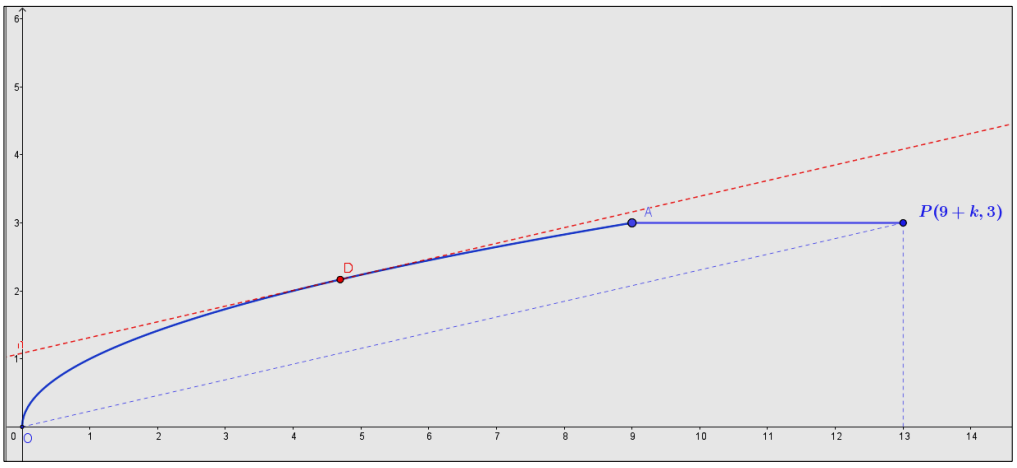
d)La funzione $g_k(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x \le 9 \\ 3 & 9 < x \le 9+k \end{cases}$ $con\ k>0 \rightarrow$

$$g'_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 9 \\ 0 & 9 < x < 9+k \end{cases} \quad con\ k>0$$

è continua nell' intervallo chiuso e limitato $[0, 9+k]\ \forall k > 0$ ma presenta un punto angoloso nel punto $A\ (9,3)$ (interno all'intervallo) in quanto

$$\lim_{x\to 9^-} g_k(x) = \lim_{x\to 9^+} g_k(x) = 3 = g_k(9) \text{ mentre}$$

$$\lim_{x\to 9^-} g'_k(x) = \frac{1}{6} \ ; \quad \lim_{x\to 9^+} g'_k(x) = 0 \rightarrow \quad g'_k(9)\ non\ esiste$$



Il rapporto incrementale è $\frac{3-0)}{9+k-0} = \frac{3}{9+k}$

Il valore di x per cui $g'_k(x) = \frac{3}{9+k}$. se esiste, deve appartenere all'intervallo$]0,9[$

L'equazione $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{9+k}$ $ammette\ la\ soluzione$ $x = \frac{(9+k)^2}{36}$

Il " $punto\ di\ Lagrange$**" esiste se e solo è soddisfatta la condizione**

$$\frac{(9+k)^2}{36} < 9 \rightarrow 0 < 9+k < 18 \rightarrow \mathbf{0 < k < 9}$$

8) Determinare i valori del parametro k per cui l'equazione

$$x^3 - 3x + k = 0$$

ammette una radice doppia e , in corrispondenza, risolvere completamente l'equazione

Soluzione

Metodo algebrico:

Una funzione algebrica polinomiale $P(x)$ ha uno zero reale di molteplicità uguale a 2 se $\exists \alpha \in R \ \ tale\ che$

$$P(\alpha) = 0 \ \cap P'(\alpha) = 0$$

Essendo $P'(x) = 3x^2 - 3$ si impone $\begin{cases} 3x^2 - 3 = & 0 \\ x^3 - 3x + k = & 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{k} = & \boldsymbol{2} \end{cases} \cup \begin{cases} \boldsymbol{x} = & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{k} = & \boldsymbol{-2} \end{cases}$$

Soluzione completa delle due equazioni

A) La somma delle tre radici deve essere uguale a 0, essendo nullo il coefficiente di x^2(formule di Viète)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{k} = & \boldsymbol{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = & 0 \\ 1 + 1 + x = & 0 \end{cases} \rightarrow x = -2$$

$$\boldsymbol{x_1 = -2 \ \ x_2 = x_3 = 1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{k} = & \boldsymbol{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - 2 = & 0 \\ -1 - 1 + x = & 0 \end{cases} \rightarrow x = 2$$

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = -1 \ \ x_3 = 2}$$

B) Scomposizione in fattori

$$\boldsymbol{x^3 - 3x + 2 = 0} \rightarrow x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) \rightarrow$$

$$(x - 1)(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = -2 \ \ x_2 = x_3 = 1}$$

$$\boldsymbol{x^3 - 3x - 2 = 0} \rightarrow x^3 - x - 2x - 2 = x(x^2 - 1) - 2(x + 1) =$$

$$(x + 1)(x^2 - x - 2) \rightarrow$$

$$(x + 1)(x + 1)(x - 2) = 0 \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = x_2 = -1 \ \ x_3 = 2}$$

Metodo grafico

L'equazione $x^3 - 3x + k = 0$, essendo di grado dispari, ammette sempre una radice reale.

Per determinare il numero delle radici reali al variare del parametro k, studiamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x \\ y = k \end{cases}$$

Studio della curva di equazione $y = -x^3 + 3x$

Definita e continua in R.

Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine)

Ammette 3 zeri reali e distinti nei punti $A(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0,0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x) = +\infty$$

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \to x = \pm 1$$

$$f''(x) = -6x = 0 \to x = 0$$

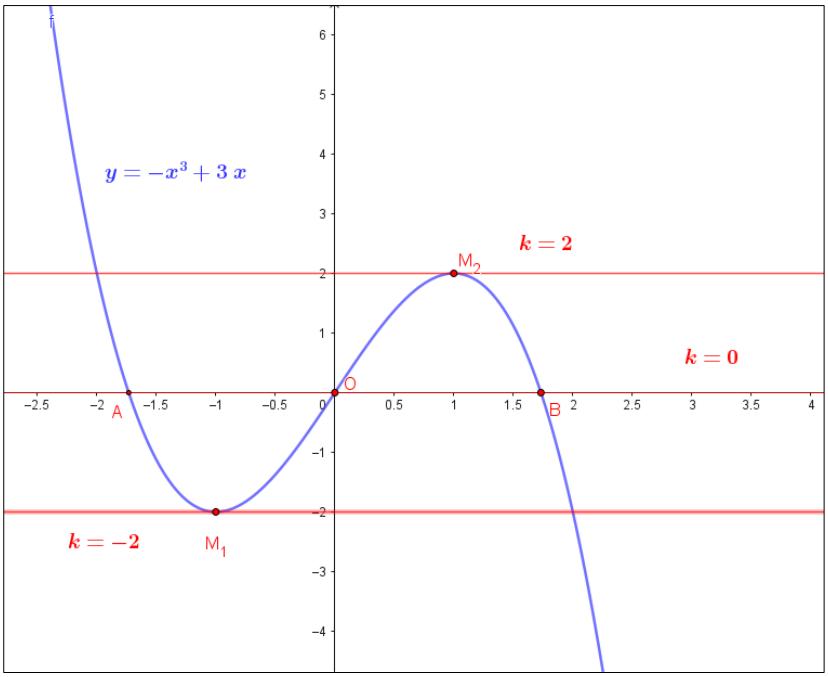
Monotonia e convessità

x		-1		0		1	
$f'(x)$	- - - - - - - - -	- -	+ + + + + + + + +	+ + + + + + + + +		- - - - - - - - -	- -
$f''(x)$	+ + + + + + + + +		+ + + + + + + + +	- - - - - - - - -	- -	- - - - - - - - -	- -
$f(x)$	Decrescente convessa		Crescente convessa	Crescente concava		Decrescente concava	

Il punto $M_1(-1, -2)$ è minimo relativo . Il punto $M_2(1,2)$ è massimo relativo , Il punto O è un flesso

Discussione completa relativamente al numero di radici reali dell'equazione

$x^3 - 3x + k = 0$



- $k < -2$ **1 soluzione reale**
- $k = -2$ **3 soluzioni reali di cui 2 coincidenti**
  $x_1 = x_2 = -1 \quad x_3 = 2$
- $-2 < k < 2$ **3 soluzioni reali e distinte**
- $k = 2$ **3 soluzioni reali di cui 2 coincidenti**
  $x_1 = -2 \quad x_2 = x_3 = 1$
- $k > 2$ **1 soluzione reale**

Suggerimenti per l'approfondimento teorico:

Quesito 6 -Teorema fondamentale del Calcolo integrale

Approfondimento: Confronto tra i concetti di Integrale indefinito e Funzione integrale.

Monotonia, convessità, estremi relativi e flessi di una funzione

Collegamento: La curva di Gauss. Distribuzione normale e funzione di Ripartizione

Quesito 7 – Teorema di Lagrange- Esempi e controesempi

Approfondimento: Differenza tra condizioni sufficienti e necessarie.

Continuità e derivabilità

- **Collegamento**: I teoremi sulle funzioni derivabili(Rolle- Cauchy -Lagrange e loro interdipendenza) Regola di de L'Hôpital

Quesito 8 Funzioni polinomiali e radici multiple)

- **Approfondimento:** Significato di radice doppia . Fattorizzazione di un polinomio. Numero di intersezioni tra una curva algebrica e una retta. Definizione di retta tangente.
- **Collegamento**. Teorema fondamentale dell'Algebra .Confronto tra il grafico di $f(x)$ e quello di $f(x) + k$, con k numero reale. Traslazione di un grafico nella direzione dell'asse y o dell'asse x