CALCOLO DELLE PROBABILITA'

4. In un'urna vi sono 10 palline rosse e 10 blu. Si estraggono , senza reinserimento ,2 palline.

a) Se la prima è rossa, qual è la probabilità che anche l'altra sia rossa?

b) La probabilità che siano entrambe dello stesso colore è uguale alla probabilità che siano di colore diverso? Si motivi la risposta.

Soluzione

Sia R l'evento $\{la\ pallina\ estratta\ \text{è}\ rossa\} \rightarrow P(R) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

e sia B l'evento $\{la\ pallina\ estratta\ \text{è}\ \ blu\} \rightarrow P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

a) Probabilità condizionata.

Se è già uscita una pallina rossa e non è stata reinserita nell'urna, la probabilità che anche la seconda sia rossa è $\frac{9}{19} = P(R|R)$

b) No, i due eventi non sono equiprobabili

La probabilità che le due palline estratte siano rosse è uguale a $P(R \cap R) = P(R) \cdot P(R|R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19}$

Analogamente la probabilità che le due palline estratte siano blu è uguale a

$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19}$.

Essendo i due eventi incompatibili, la probabilità dell'evento unione è uguale alla somma delle due probabilità:

la probabilità che le palline siano entrambe dello stesso colore eguale a

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \mathbf{\frac{9}{19}}$

Pertanto, l'evento contrario avrà probabilità $1 - \mathbf{\frac{9}{19}} = \frac{10}{19}$

Metodo alternativo

Calcolo diretto delle due probabilità

Il numero totale di modi in cui si possono estrarre 2 palline su 20 è dato dalle combinazioni di 20 elementi a gruppi di 2: $C_{20,2} = \frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$

- Casi favorevoli per 2 Rosse= Casi favorevoli per 2 Blu=: $C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$

Probabilità dell'evento $\{le\ pallina\ estratte\ hanno\ lo\ stesso\ colore\}=\frac{45+45}{190}=\frac{9}{19}$

- Casi favorevoli per 1 Rossa e 1 Blu $= 10 \cdot 10$ (dobbiamo scegliere 1 rossa tra 10 e 1 blu tra 10)

Probabilità dell'evento $\{le\ pallina\ estratte\ hanno\ colore\ diverso\}=\frac{10\cdot 10}{190}=\frac{10}{19}$

Motivazione intuitiva: dopo aver estratto la prima pallina, nell'urna rimangono più palline dell'altro colore (10 contro 9), quindi è leggermente più probabile che la seconda sia di colore diverso.

5. In una popolazione l'1% degli individui è affetto da una certa malattia.
Un test diagnostico ha le seguenti caratteristiche:

- **sensibilità del test, cioè la probabilità che esso dia risultato positivo su un individuo malato : 95% dei casi;**
- **specificità del test, cioè la probabilità che esso dia risultato negativo se l'individuo è sano: 90% dei casi.**

Si sceglie a caso un individuo e lo si sottopone al test.

a) **Calcolare la probabilità che il test risulti positivo.**
b) **Sapendo che il test è positivo, calcolare la probabilità che l'individuo sia effettivamente malato Interpretare il risultato ottenuto.**

Soluzione

Si sceglie a caso un individuo e lo si sottopone al test.

$$M: l'individuo\ \text{è}\ malato \quad P(M) = 0{,}01$$

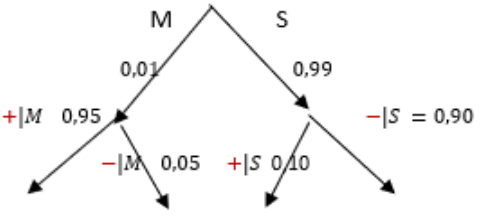
$$S: l'individuo\ \text{è}\ sano \quad P(S) = 0{,}99$$

$$+:\ il\ test\ \text{è}\ positivo \quad P(+|M) = 0{,}95$$

$$-: il\ test\ \text{è}\ negativo \quad P(-|S) = 0{,}90$$

a) **Probabilità che il test risulti positivo: $P(+)$**

Diagramma ad albero



$$\boldsymbol{P}(+) = P(\text{M}\cap +|M) + P(\text{S}\cap +|S) = P(\text{M}) \cdot P(+|M) + P(\text{S}) \cdot P(+|S) =$$

$$0{,}01 \cdot 0{,}95 + 0{,}99 \cdot 0.10 = \mathbf{0.1085} \approx \mathbf{10.8}\%$$

:

b) Sapendo che il test è positivo, calcolare la probabilità che l'individuo sia effettivamente malato.

$$P(M|+) = \frac{P(\text{M}) \cdot P(+|M)}{P(+)} = \frac{P(\text{M}) \cdot P(+|M)}{P(\text{M}) \cdot P(+|M) + P(\text{S}) \cdot P(+|S)}$$ **Formula di Bayes**

$$\frac{0{,}01 \cdot 0{,}95}{0{,}01 \cdot 0{,}95 + 0{,}99 \cdot 0.10} = \frac{0{,}0095}{0.1085} \approx \mathbf{0,088}\ (\boldsymbol{circa}\ \mathbf{8,8}\%)$$

Interpretazione del risultato

Il risultato sembra **controintuitivo :** il test è molto affidabile (95% sui malati) ma la probabilità di essere malati , in corrispondenza di un un test positivo, non arriva al **9%**.

Spiegazione intuitiva:

- la malattia è molto rara (1%);
- ci sono molti più sani che malati;
- anche un piccolo tasso di falsi positivi (10%) applicato ai sani produce molti casi positivi.

Per interpretare il risultato in modo più rigoroso facciamo una riflessione sul Teorema di Bayes.

*Le probabilità $P(H_0)$ e $P(H_1)$ sono chiamate **probabilità "a priori"** poiché indicano il grado di fiducia che l'osservatore attribuisce a ciascuna delle due ipotesi H_0 e H_1, prima che l'evento E si verifichi.*

*$P(H_i/E)$ sono le **probabilità a posteriori.***

Il verificarsi dell'evento E potrebbe modificare le probabilità " a priori" , secondo il Teorema di Bayes :

$$P(H_0|E) = \frac{P(H_0) \cdot P(E|H_0)}{P(E)} \qquad P(H_1|E) = \frac{P(H_1) \cdot P(E|H_1)}{P(E)}$$

da cui $$\frac{\boldsymbol{P(H_1|E)}}{\boldsymbol{P(H_0|E)}} = \frac{\boldsymbol{P(H_1)}}{\boldsymbol{P(H_0)}} \cdot \frac{\boldsymbol{P(E|H_1)}}{\boldsymbol{P(E|H_0)}}$$

rapporto delle probabilità " a posteriori" = rapporto delle probabilità " a priori" moltiplicato per $\frac{P(E|H_1)}{P(E|H_0)}$ ***(fattore di Bayes)***

Il rapporto delle probabilità " a priori" continua ad avere un peso nel calcolo del rapporto delle probabilità " a posteriori".

Nel nostro caso

il rapporto delle probabilità a priori è $\frac{P(S)}{P(M)} = 99$

il rapporto delle probabilità a posteriori è $\frac{P(S|+)}{P(M|+)} = \frac{P(S)}{P(M)} \cdot \frac{P(+|S)}{P(+|M)} =$

$$99 \cdot \frac{0{,}10}{0{,}95} = \frac{198}{19} \approx 10{,}4$$

La malattia è molto rara , la probabilità di trovare un individuo malato è molto più bassa di quella di trovare un individuo sano; pertanto, anche le probabilità a posteriori sono sbilanciate a favore della seconda ipotesi.

Suggerimenti per l'approfondimento teorico:

Quesito 4 – Estrazione senza reinserimento

Approfondimento

Probabilità classica

Dipendenza/indipendenza degli eventi

Eventi incompatibili

Calcolo combinatorio: Disposizioni – Combinazioni

Collegamento

Estrazioni con reinserimento. Prove bernoulliane .Distribuzione binomiale

Quesito 5- Teorema di Bayes

Approfondimento
Probabilità soggettiva-
Teorema delle Probabilità totali.
Collegamento
Ulteriori definizioni di Probabilità: classica, statistica o frequentistica.
Analisi dei dati. Tabella a doppia entrata (di contingenza)