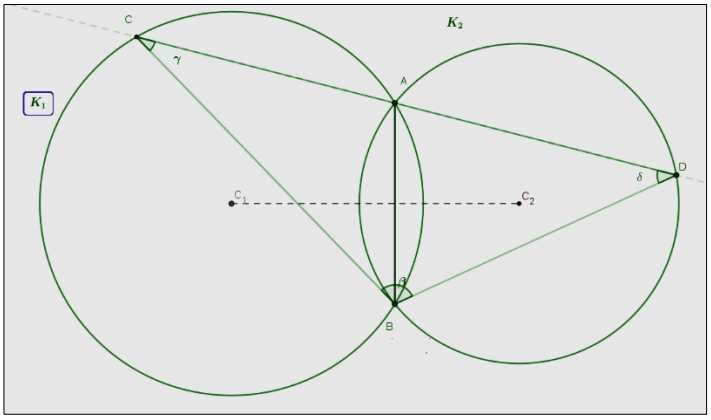
Quesiti geometria-trigonometria

1. **Due circonferenze, i cui raggi misurano rispettivamente 6 e 5 e la cui distanza fra i centri misura 9, hanno in comune la corda AB.**

Una retta r,passante per il punto A, incontra le due circonferenze in C e in D rispettivamente. Dimostrare per via geometrica che la lunghezza della secante CD è massima (e determinarne il valore) quando giace su una retta parallela alla congiungente i due centri.

Soluzione



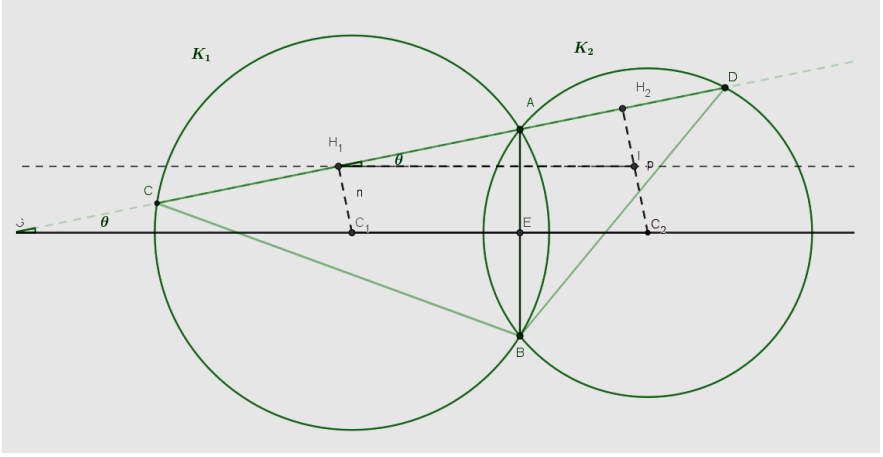
Siano K_1 *e* K_2 due circonferenze tra loro secanti , di centri C_1 *e* C_2 , rispettivamente, e siano A e B i loro punti di intersezione (indichiamo con K_1 *quella di raggio maggiore*)

Consideriamo una retta r passante per A e indichiamo con C l'ulteriore intersezione di r con K_1 e con D l'ulteriore intersezione con K_2.

La secante CD di lunghezza massima va ricercata tra quelle ottenute con punti appartenenti al maggiore dei due archi AB di ciascuna circonferenza.

Primo metodo

Si proietti il segmento $C_1\ C_2$ nel segmento $H_1\ H_2 \in r$



Essendo H_1 il punto medio di CA e H_2 il punto medio di DA (proprietà delle corde di un cerchio), si ha $\overline{CD}$= 2 $\overline{H_1\ H_2}$,

Pertanto il valore massimo di $\overline{CD}$ si ottiene in corrispondenza di quello di $\overline{H_1\ H_2}$

ovvero quando $\overline{H_1\ H_2} = \overline{C_1\ C_2}$.

Questo si verifica quando la retta r è parallela alla congiungente i due centri .

La lunghezza massima del segmento CD è uguale a 2 $\overline{H_1\ H_2}$=2 $\overline{C_1\ C_2}$= 18

Secondo metodo

Costruito il triangolo BCD , osserviamo che l'ampiezza dei suoi angoli interni non varia al variare della retta r, in quanto , per il teorema della corda,

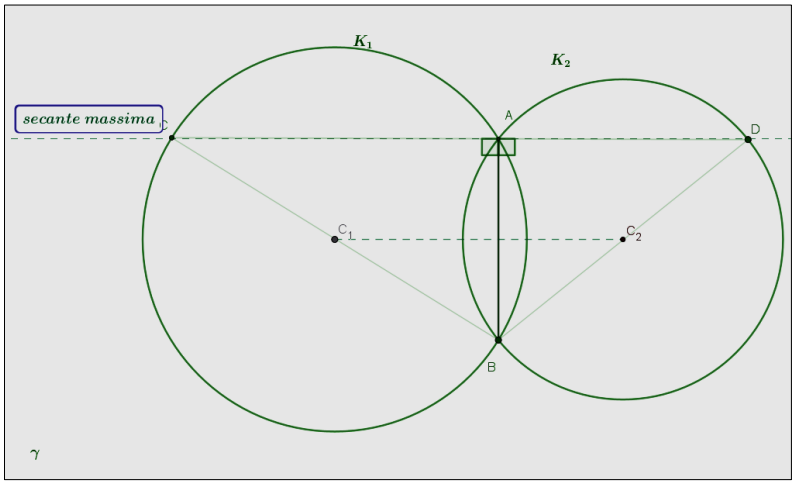
- l'ampiezza γ dell'angolo $A\hat{C}B$ dipende solo dalla lunghezza della corda AB e dal raggio di K_1
- l'ampiezza δ dell'angolo $A\hat{D}B$ dipende solo dalla lunghezza della corda AB e dal raggio di K_1
- di conseguenza , anche l'angolo $C\hat{B}D$ ha ampiezza costante $\beta = \pi - (\gamma + \delta)$

Tutti i triangoli di vertici BCD , che possiamo costruire nel modo suddetto, , sono tra loro simili e , quindi, nel triangolo per cui è massima la lunghezza del lato CD, anche lunghezze dei lati BC e BD assumono valore massimo.

Poiché questi ultimi sono due corde , rispettivamente di $K_1\ e\ \ di\ K_2$, le loro lunghezze massime corrispondono ai rispettivi diametri. In corrispondenza si osserva che la retta CD è perpendicolare al segmento AB, formando con esso due angoli retti.

Il segmento $C_1C_2, di\ lunghezza\ 9$ congiunge i punti medi dei lati CD e BC del triangolo ABC; pertanto, è parallelo al terzo lato ed è congruente alla sua metà.

Ritroviamo che la lunghezza del segmento CD è pertanto 18



2. Determinare l'equazione del piano passante per il punto $P(1, 0, -2)$, perpendicolare alla retta n di equazioni parametriche: $\begin{cases} x = & 2 + t \\ y = & 3 - 2t \\ z = & t \end{cases}$ e le coordinate del loro punto di intersezione Q.

Soluzione

L'equazione di un generico piano passante per il punto P è

$$a(x-1) + b(y-0) + c(z+2) = 0.$$

La terna (a, b, c) è proporzionale alla terna dei parametri direttori della normale n: $(1, -2, 1)$.

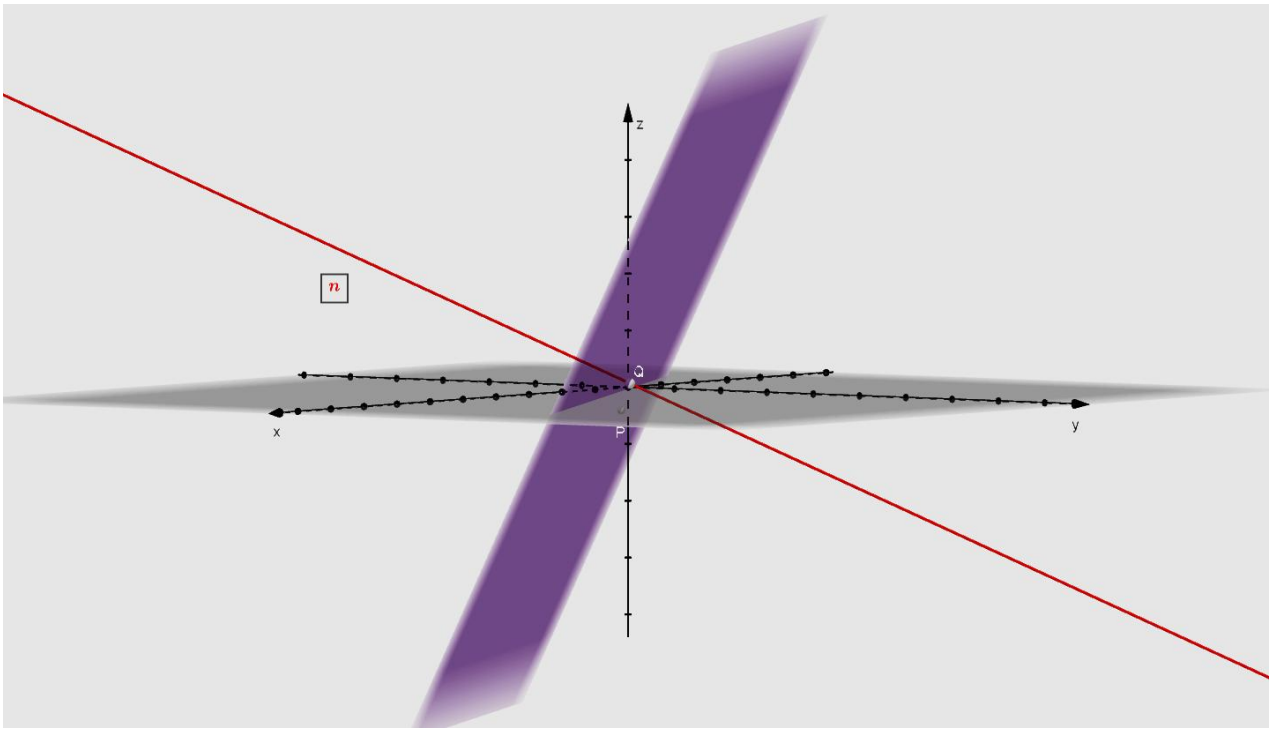
Pertanto l'equazione richiesta è $(x-1) - 2(y-0) + (z+2) = 0$

ovvero $x - 2y + z + 1 = 0$.

Il punto di incontro retta-piano si determina imponendo al piano il passaggio per il generico punto della retta

$$2 + t - 6 + 4t + t + 1 = 0 \rightarrow 6t = 3 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$Q \begin{cases} x = & \frac{5}{2} \\ y = & 2 \\ z = & \frac{1}{2} \end{cases}$$



3. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, determinare le equazioni delle rette tangenti condotte dal punto esterno $P(2,-5)$.Indicati con A e B i punti di tangenza, stabilire, motivando la risposta, se l'ampiezza dell'angolo $\widehat{APB}$ è uguale, maggiore o minore di $30°$.

Soluzione

La parabola è simmetrica rispetto alla retta $x = 2$, ha il vertice nel punto $(2,-1)$,incontra l'asse x nei punti $C(1,0)$ e $D(3,0)$.

Una retta del fascio di centro P è tangente alla curva se l'incontra in 2 punti coincidenti.

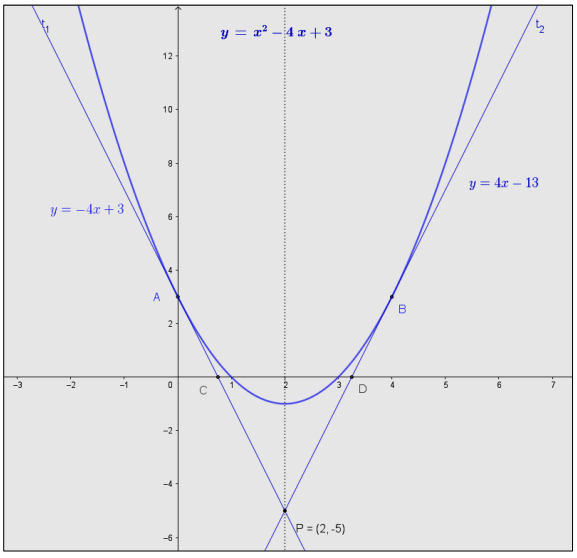
$$\begin{cases} y = & m(x-2) - 5 \\ y = & x^2 - 4x + 3 \end{cases} \rightarrow x^2 - (4+m)x + 2m + 8 = 0$$

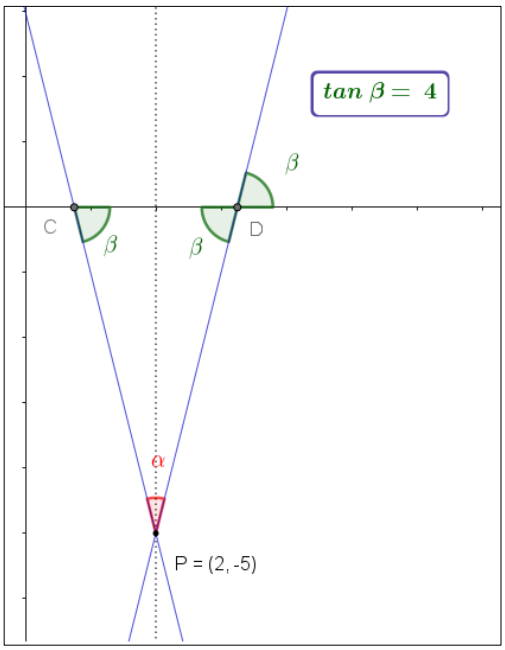
$$\Delta = (4+m)^2 - 8m - 32 = 0 \rightarrow m^2 - 16 = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{m = \pm 4}$$

Le equazioni delle due tangenti sono

$$t_1: y = -4x + 3 \qquad t_2: y = 4x - 13$$





Indicati con C e D i punti in cui le due rette incontrano l'asse delle ascisse, rispettivamente, osserviamo che tra l'ampiezza α dell'angolo $A\hat{P}B \equiv C\hat{P}D$ e l'ampiezza dell'angolo β , che la retta t_2 forma con la direzione positiva dell'asse x, sussiste la relazione

$$\boldsymbol{\alpha + 2\beta = 180° \rightarrow \alpha = 180° - 2\beta \rightarrow \tan\alpha = -\tan 2\beta = -\frac{2\tan\beta}{1 - tan^2\beta}}$$

Poiché $\tan\beta = 4$ (coefficiente angolare della retta t_2)

$$\tan \alpha = -\frac{8}{1-16} = \frac{8}{15} < \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha < 30°$$

Metodo alternativo

Sappiamo che $\tan \beta = 4$ e $\tan 75° = 2 + \sqrt{3} < 4$

- Nell'ipotesi $\alpha = 30°$, sarebbe $\beta = 75° \rightarrow \tan \beta = \tan 75° =$ **Falso**
- Nell'ipotesi $\alpha > 30°$, sarebbe $\beta < 75° \rightarrow \tan \beta < \tan 75°$ **Falso**
- Nell'ipotesi $\alpha < 30°$, sarebbe $\beta > 75° \rightarrow \tan \beta > \tan 75°$ **VERO**

Metodo diretto, con l'uso della calcolatrice

$$\beta = \tan^{-1} 4 \approx 76° \rightarrow \boldsymbol{2\beta > 150° \rightarrow \alpha < 30°}$$

Suggerimenti per l'approfondimento teorico:

Quesito 1 -Geometria Piana (Corda comune e secante massima)

- **Approfondimento**: Posizioni reciproche di due circonferenze nel piano o di una retta e una circonferenza. Teorema delle secanti o delle tangenti condotte da un punto esterno a una circonferenza.
- **Collegamento**: Il passaggio dalla geometria sintetica alla trigonometria (teorema della corda) .

Quesito 2- Geometria nello Spazio (Piano e Retta)

- **Approfondimento**: Condizioni di perpendicolarità tra due rette nel piano o nello spazio. Si può affermare che la lunghezza del segmento PQ corrisponde alla distanza tra P ed n?
- **Collegamento:** Perpendicolarità tra vettori. Prodotto scalare e prodotto vettoriale

Quesito 3 Geometria Analitica (Tangenti alla parabola-Trigonometria)

Approfondimento: La condizione di tangenza $(\Delta = 0)$vista come limite. Angolo di due rette.

Collegamento: Definizione di derivata come coefficiente angolare della tangente.