Alcune proprietà del tetraedro

di Antonino Giambò

1. In precedenti articoli, pubblicati su Matmedia, mi sono occupato, a più riprese, dei punti particolari di un tetraedro. Li ricordo, per successivi richiami:

A) *Punti notevoli di un tetraedro – Parte Prima: Baricentro, Circocentro, Incentro*, pubblicato il giorno 8 luglio 2022.

B) *Punti notevoli di un tetraedro – Parte Seconda*: *Tetraedro ortocentrico*, pubblicato il 26 luglio 2022.

C) *Punti notevoli di un tetraedro – Parte Terza: Il tetraedro equifacciale e il tetraedro isodinamico*, pubblicato il 4 agosto 2022.

Riprendo qui l'argomento per mostrare, sempre del tetraedro, altre interessanti proprietà, la cui scoperta è merito del francese Gaspard Monge. Ricordo che un tetraedro altro non è che una piramide triangolare.

Non mi soffermerò sulle dimostrazioni, salvo in qualche caso, ma solamente sulla verifica delle proprietà riferite a casi particolari. Verifiche che saranno condotte utilizzando lo strumento della Geometra Analitica dello spazio.

Il procedimento dimostrativo, in realtà, non differisce dalla verifica. Solo che è più complicato per le complessità dei calcoli, che effettivamente sono molto noiosi.

Considero comunque le diverse verifiche un buon esercizio per gli studenti liceali, ai quali, in conclusione dell'articolo, mi permetto di formulare anche una proposta di lavoro sullo stesso argomento.

2. Come detto sopra, l'argomento sarà trattato con il supporto della Geometria Analitica dello spazio. Per cui, senza ripeterlo, supponiamo una volta per tutte che lo spazio sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz).

Considerato poi che, per la piena comprensione di quanto esporrò è necessario conoscere alcune nozioni preliminari, è su queste che in primo luogo mi soffermo.

- Dati i due punti $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$, il punto medio M del segmento AB ha le seguenti coordinate:
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}\,,\quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\,,\quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}\,.$$
- La retta passante per due punti assegnati $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$ ha, salvo casi eccezionali, le seguenti equazioni:
$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}\,.$$
- Ogni piano ha un'equazione del tipo:
$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,.$$
- Dati il punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e la retta r di equazioni: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, il piano passante per P e perpendicolare alla retta r ha equazione:
$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0\,.$$
I coefficienti a, b, c si dicono *parametri direttori* della retta.
- Viceversa, dati il punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e il piano α di equazione $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$, la retta passante per P e perpendicolare ad α ha, salvo casi eccezionali, le seguenti equazioni:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}\,.$$
- Se i vertici di un tetraedro (figura 1) sono i punti:
$$A(x_A, y_A, z_A),\ \ B(x_B, y_B, z_B),\ \ C(x_C, y_C, z_C),\ \ D(x_D, y_D, z_D),$$

le coordinate del suo baricentro G sono le seguenti (per la dimostrazione si può vedere l'articolo A, citato sopra):

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4},$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4},$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}.$$

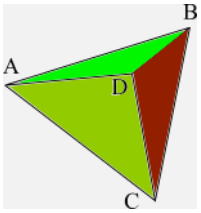


figura 1

3. Fatta questa premessa, possiamo andare ad occuparci delle proprietà del tetraedro.

Ma prima, un paio di definizioni:

- Due spigoli di un tetraedro non aventi punti in comune si dicono *opposti*.
  Naturalmente, in ogni tetraedro ci sono tre coppie di spigoli opposti. Per esempio, nel tetraedro rappresentato in figura 1, le tre coppie di spigoli opposti sono queste:
  $$AB - CD, \quad AC - BD, \quad AD - BC.$$
- In un tetraedro, il segmento che congiunge i punti medi di due spigoli opposti si chiama *bimediana*. Ovviamente, in ogni tetraedro ci sono tre bimediane.

Ecco allora l'enunciato della prima proprietà.

PROPRIETÀ 1.

In ogni tetraedro, le tre bimediane concorrono in uno stesso punto che divide a metà ciascuna di esse ed è il baricentro del tetraedro.

Di questa proprietà, a dire il vero, mi sono già occupato ampiamente nel succitato articolo A e ad esso rimando per la dimostrazione, ivi condotta per via analitica.

Qui mi limito a dire che il matematico polacco, naturalizzato americano, Nathan Altshiller Court (1881-1968), nel suo trattato *Geometria Solida Pura Moderna* (*Moderne Pure Solid Geometry*, 1935) attribuisce il merito della scoperta di questa proprietà al matematico lussemburghese, naturalizzato belga, Joseph Jean Baptiste Neuberg (1840-1926).

Ora, a me sembra che l'attribuzione della scoperta a Neuberg sia un filino esagerata.

La proprietà è infatti presente in un lavoro di Gaspard Monge (1746-1818) dal titolo *Memoria sulla piramide triangolare* (*Mémoire sur la pyramide triangulaire*). Sembra che questa Memoria sia stata pubblicata per la prima volta intorno al 1773 negli Atti dell'Accademia di Berlino.

Ad ogni modo, l'enunciato che riporto è tratto da una Corrispondenza di Monge sulla Scuola Reale Politecnica per l'uso degli allievi di questa scuola, volume 2, anno 1813. La proprietà, contenuta nell'articolo *Sur la pyramide triangulaire,* vi compare come Teorema I e nella lingua di Monge così recita:

Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est au milieu de la droite joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques. (*Il centro di gravità di una piramide triangolare si trova al centro della retta che unisce i punti medi di due qualsiasi spigoli opposti*).

Enunciato evidentemente equivalente a quello della proprietà 1.

Monge ne fornisce due dimostrazioni, senza utilizzare la Geometria Analitica.

A Neuberg, comunque, va attribuito il merito, non secondario, di aver approfondito ed esteso le proprietà del tetraedro. Ne tratta precisamente nella *Memoria sul tetraedro* (*Mémoire sur le tétraèdre*, 1884). Di alcune di queste proprietà mi sono occupato negli articoli citati in premessa e, in particolare, nell'articolo C, dove si tratta di tetraedro *equifacciale* e di tetraedro *isodinamico*. Lo stesso termine "tetraedro isodinamico" è stato coniato proprio da Neuberg.

Come già riferito nello stesso articolo C, ricordo che Neuberg è noto anche per aver fondato, nel 1881, assieme al collega Paul Mansion (1844-1919) la rivista belga *Mathesis*, la quale cessò le pubblicazioni nel 1915 a causa della prima guerra mondiale. Neuberg aveva preso la cittadinanza belga nel 1866.

4. Anche la seconda proprietà del tetraedro è una scoperta di Monge.

Premesso che in un tetraedro si definisce *piano di Monge* il piano condotto per il punto medio di uno spigolo perpendicolarmente allo spigolo opposto e stabilito che in ogni tetraedro ci sono sei piani di Monge, ecco l'enunciato della proprietà.

PROPRIETÀ 2.

I sei piani di Monge di un qualsiasi tetraedro passano per uno stesso punto.

Questo punto è detto ***punto di Monge*.**

Ci proponiamo di verificare la proprietà con riferimento al tetraedro di vertici (figura 2):

$$O(0,0,0),\ \ A(4,2,0),\ \ B(0,6,0),\ \ C(2,4,4).$$

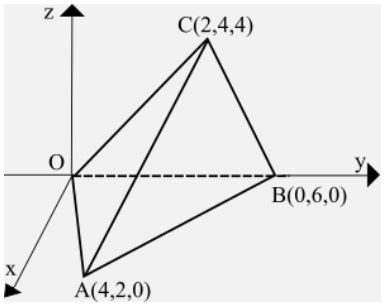


figura 2

- Determiniamo per prima cosa le coordinate dei punti medi degli spigoli. Si trovano facilmente:

$$M_{OA}(2,1,0),\ \ M_{OB}(0,3,0),\ \ M_{OC}(1,2,2),\ \ M_{AB}(2,4,0),\ \ M_{AC}(3,3,2),\ \ M_{BC}(1,5,2).$$

- Troviamo adesso i parametri direttori delle rette dei sei spigoli, passando naturalmente per le loro equazioni.
  - Retta OA: si tratta di una retta in posizione particolare, poiché è contenuta nel piano xy di equazione $z = 0$.

    $$z = 0,\ \ \frac{x}{2} = \frac{y}{1}.$$

    I parametri direttori della retta OA sono i seguenti: $(2,1,0)$.
  - Retta OB: si tratta dell'asse y. Le sue equazioni sono le seguenti:

    $$x = 0,\ \ z = 0.$$

    I parametri direttori della retta OB sono i seguenti: $(0,1,0)$.
  - Retta OC:

    $$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{4} \quad \text{o meglio:} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}.$$

    I parametri direttori della retta OC sono i seguenti: $(1,2,2)$.
  - Retta AB: anche questa retta è contenuta nel piano xy di equazione $z = 0$.

    $$z = 0,\ \ \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-1}.$$

    I parametri direttori della retta AB sono i seguenti: $(1,-1,0)$.
  - Retta AC:

    $$\frac{x-4}{2-4} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z}{4} \quad \text{o meglio:} \quad \frac{x-4}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}.$$

    I parametri direttori della retta AC sono i seguenti: $(-1,1,2)$.
  - Retta BC:

    $$\frac{x}{2} = \frac{y-6}{4-6} = \frac{z}{4} \quad \text{o meglio:} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z}{2}.$$

    I parametri direttori della retta BC sono i seguenti: $(1,-1,2)$.
- A questo punto abbiamo tutti gli elementi per trovare le equazioni dei sei piani di Monge.

- Piano α, condotto per il punto medio $M_{OA}(2,1,0)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto BC di parametri direttori $(1,-1,2)$:
$$1\cdot(x-2)-1\cdot(y-1)+2\cdot(z-0)=0.$$
Vale a dire:
$$\alpha\equiv x-y+2z-1=0\,.$$
- Piano β, condotto per il punto medio $M_{OB}(0,3,0)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto AC di parametri direttori $(-1,1,2)$:
$$-1\cdot(x-0)+1\cdot(y-3)+2\cdot(z-0)=0.$$
Vale a dire:
$$\beta\equiv -x+y+2z-3=0\,.$$
- Piano γ, condotto per il punto medio $M_{OC}(1,2,2)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto AB di parametri direttori $(1,-1,0)$:
$$1\cdot(x-1)-1\cdot(y-2)=0.$$
Vale a dire:
$$\gamma\equiv x-y+1=0\,.$$
- Piano λ, condotto per il punto medio $M_{AB}(2,4,0)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto OC di parametri direttori $(1,2,2)$:
$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-4)+2\cdot(z-0)=0.$$
Vale a dire:
$$\lambda\equiv x+2y+2z-10=0\,.$$
- Piano μ, condotto per il punto medio $M_{AC}(3,3,2)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto OB di parametri direttori $(0,1,0)$:
$$\mu\equiv y-3=0\,.$$
- Piano ν, condotto per il punto medio $M_{BC}(1,5,2)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto OA di parametri direttori $(2,1,0)$:
$$2\cdot(x-1)+1\cdot(y-5)=0.$$
Vale a dire:
$$\nu\equiv 2x+y-7=0\,.$$

- Andiamo a verificare infine che i sei piani $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu$ passano per uno stesso punto.
Incominciamo a calcolare il punto M in cui si secano i tre piani α,β,γ. Per questo occorre risolvere il seguente sistema nelle incognite x,y,z:
$$\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ -x+y+2z-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$
A conti fatti si trova $M(x,x+1,1),\forall\, x\in\mathbb{R}$.
Questo significa, in realtà, che i tre piani non hanno solo un punto in comune, ma una retta in comune, precisamente la retta di equazioni $(z=1,\ y=x+1)$.
Imponiamo, comunque, che il punto M appartenga al piano λ. Deve risultare soddisfatta la seguente condizione:
$$x+2(x+1)+2\cdot 1-10=0,\quad \text{da cui si ottiene:}\quad x=2.$$
Ne consegue che il punto M ha coordinate $(2,3,1)$.
Adesso è facile verificare che questo punto appartiene anche ai piani μ,ν.

Il punto $M(2,3,1)$ è pertanto comune a tutti e sei i piani di Monge. È dunque il punto di Monge.

5. Come ho detto in premessa, il procedimento dimostrativo nel caso generale non differisce da quello appena esposto con riferimento ad un caso particolare.

Nondimeno, per dare un'idea più completa e precisa di quanto vado dicendo circa la complessità dei calcoli, propongo la dimostrazione della proprietà in un caso che, se non è esattamente il caso generale, vi si avvicina parecchio.

Sia assegnato dunque un tetraedro OABC, nel quale lo spigolo OC sia perpendicolare in O alla faccia OAB.

Riferiamo lo spazio ad un sistema di assi cartesiani in modo che l'origine sia il punto O, l'asse y sia la retta OB orientata da O verso B, l'asse z sia la retta OC, orientata da O verso C e l'asse x sia la perpendicolare al piano yz, orientata in modo da avere un sistema levogiro (figura 3).

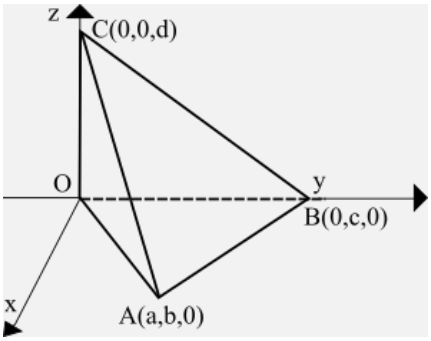


figura 3

Assegniamo, in modo del tutto arbitrario le coordinate dei vertici A, B, C del tetraedro, essendo ovviamente $(0,0,0)$ le coordinate del vertice O. Siano dunque: $A(a,b,0), B(0,c,0), C(0,0,d)$.

Ripetiamo alla lettera il procedimento seguito nel precedente esercizio.

- Determiniamo per prima cosa le coordinate dei punti medi degli spigoli:

$$M_{OA}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right),\ M_{OB}\left(0,\frac{c}{2},0\right),\ M_{OC}\left(0,0,\frac{d}{2}\right),\ M_{AB}\left(\frac{a}{2},\frac{b+c}{2},0\right),\ M_{AC}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right),\ M_{BC}\left(0,\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right).$$

- Troviamo adesso i parametri direttori delle rette dei sei spigoli, passando naturalmente per le loro equazioni.
  - Retta OA: si tratta di una retta in posizione particolare, poiché è contenuta nel piano xy di equazione $z=0$.
  $$z=0,\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$$
  I parametri direttori della retta OA sono i seguenti: $(a,b,0)$.
  - Retta OB: si tratta dell'asse y. Le sue equazioni sono le seguenti:
  $$x=0,\ z=0.$$
  I parametri direttori della retta OB sono i seguenti: $(0,1,0)$.
  - Retta OC: si tratta dell'asse z. Le sue equazioni sono le seguenti:
  $$x=0,\ y=0\,.$$
  I parametri direttori della retta OC sono i seguenti: $(0,0,1)$.
  - Retta AB: anche questa retta è contenuta nel piano xy di equazione $z=0$.
  $$z=0,\ \frac{x-a}{a-0}=\frac{y-b}{b-c}.$$
  I parametri direttori della retta AB sono i seguenti: $(a,b-c,0)$.
  - Retta AC:
  $$\frac{x-a}{a-0}=\frac{y-b}{b-0}=\frac{z-0}{0-d}.$$
  I parametri direttori della retta AC sono i seguenti: $(a,b,-d)$.
  - Retta BC: questa retta giace nel piano yz di equazione $x=0$.
  $$x=0,\ \frac{y}{c}+\frac{z}{d}=1\ \text{ o meglio: }\ x=0,\ \frac{y}{-c}=\frac{z-d}{d}.$$
  I parametri direttori della retta BC sono i seguenti: $(0,-c,d)$.

- A questo punto abbiamo tutti gli elementi per trovare le equazioni dei sei piani di Monge.

- Piano α, condotto per il punto medio $M_{OA}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto BC di parametri direttori $(0,-c,d)$:

$$0\cdot\left(x-\frac{a}{2}\right)-c\cdot\left(y-\frac{b}{2}\right)+d\cdot(z-0)=0.$$

Vale a dire:

$$\alpha\equiv -c\,y+d\,z+\frac{b\,c}{2}=0\,.$$

- Piano β, condotto per il punto medio $M_{OB}\left(0,\frac{c}{2},0\right)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto AC di parametri direttori $(a,b,-d)$:

$$a\cdot(x-0)+b\cdot\left(y-\frac{c}{2}\right)-d\cdot(z-0)=0.$$

Vale a dire:

$$\beta\equiv a\,x+b\,y-d\,z-\frac{b\,c}{2}=0\,.$$

- Piano γ, condotto per il punto medio $M_{OC}\left(0,0,\frac{d}{2}\right)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto AB di parametri direttori $(a,b-c,0)$:

$$a\cdot(x-0)+(b-c)\cdot(y-0)+0\cdot\left(z-\frac{d}{2}\right)=0.$$

Vale a dire:

$$\gamma\equiv a\,x+(b-c)\,y=0\,.$$

- Piano λ, condotto per il punto medio $M_{AB}\left(\frac{a}{2},\frac{b+c}{2},0\right)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto OC di parametri direttori $(0,0,1)$:

$$z=0.$$

- Piano μ, condotto per il punto medio $M_{AC}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{d}{2}\right)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto OB di parametri direttori $(0,1,0)$:

$$\mu\equiv y-\frac{b}{2}=0\,.$$

- Piano ν, condotto per il punto medio $M_{BC}\left(0,\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right)$ perpendicolarmente allo spigolo opposto OA di parametri direttori $(a,b,0)$:

$$a\cdot(x-0)+b\cdot\left(y-\frac{c}{2}\right)+0\cdot\left(z-\frac{d}{2}\right)=0.$$

Vale a dire:

$$\nu\equiv a\,x+b\,y-\frac{b\,c}{2}=0\,.$$

- Andiamo a verificare infine che i sei piani $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu$ passano per uno stesso punto.
Conviene calcolare dapprima il punto comune ai tre piani $,\lambda,\mu,\nu$. Per questo occorre risolvere il seguente sistema nelle incognite x,y,z:

$$\begin{cases} z=0 \\ y-\frac{b}{2}=0 \\ a\,x+b\,y-\frac{b\,c}{2}=0 \end{cases}$$

A conti fatti si trova:

$$M\left(\frac{b\,c-b^2}{2\,a},\ \frac{b}{2},\ 0\right).$$

Si tratta, a questo punto, di verificare che le coordinate del punto M soddisfano alle equazioni dei piani α,β,γ. Di fatto:

- si sostituiscono le coordinate di M nel primo membro dell'equazione del piano α:

$$-c\,y + d\,z + \frac{b\,c}{2} = -c\,\frac{b}{2} + d \cdot 0 + \frac{b\,c}{2} = 0\,;$$

- si sostituiscono le coordinate di M nel primo membro dell'equazione del piano β:

$$a\,x + b\,y - d\,z - \frac{b\,c}{2} = a\,\frac{b\,c - b^2}{2\,a} + b\,\frac{b}{2} - d \cdot 0 - \frac{b\,c}{2} = \frac{b\,c}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{b\,c}{2} = 0\,;$$

- si sostituiscono le coordinate di M nel primo membro dell'equazione del piano γ:

$$a\,x + (b - c)\,y = a\,\frac{b\,c - b^2}{2\,a} + (b - c)\,\frac{b}{2} = \frac{b\,c}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{b\,c}{2} = 0\,.$$

Il punto M è pertanto comune a tutti e sei i piani di Monge. È dunque il punto di Monge.

6. I tetraedri godono di quest'altra proprietà.

PROPRIETÀ 3.

In ogni tetraedro, il punto di Monge M, il baricentro G e il circocentro K sono allineati. Inoltre M è il punto simmetrico di K rispetto a G, vale a dire che G è il punto medio del segmento MK.

La retta che contiene i tre punti M, G, K si chiama ***retta di Monge***.

Anche di questa proprietà ci limitiamo ad una verifica. Verifica che effettuiamo sullo stesso tetraedro OABC preso precedentemente in considerazione (figura 2), i cui vertici sono i punti seguenti:

$$O(0,0,0),\ \ A(4,2,0),\ \ B(0,6,0),\ \ C(2,4,4).$$

- Conosciamo già le coordinate del punto M di Monge:

$$M(2,3,1)\,.$$

- Calcoliamo le coordinate del baricentro G:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} = \frac{0+4+0+2}{4} = \frac{3}{2},$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} = \frac{0+2+6+4}{4} = 3\,,$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = \frac{0+0+0+4}{4} = 1\ .$$

Il baricentro del tetraedro è dunque il punto:

$$G\left(\frac{3}{2}, 3, 1\right).$$

- Il circoncentro del tetraedro è il centro K della sfera circoscritta al tetraedro.
  Sappiamo che una generica sfera ha equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

  e che il suo centro è il punto:

$$K\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right).$$

  Si tratta pertanto di calcolare i valori dei coefficienti a, b, c. Lo facciamo trovando l'equazione della sfera passante per i 4 vertici del tetraedro.
  Devono dunque essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 16 + 4 + 4\,a + 2\,b + d = 0 \\ 36 + 6\,b + d = 0 \\ 4 + 16 + 16 + 2\,a + 4\,b + 4\,c + d = 0 \end{cases} \quad \text{ossia:} \quad \begin{cases} d = 0 \\ 2\,a + b + 10 = 0 \\ 6 + b = 0 \\ a + 2\,b + 2\,c + 18 = 0 \end{cases}$$

  A conti fatti, si ottengono i seguenti valori:

$$a = -2,\ \ b = -6,\ \ c = -2,\ \ d = 0.$$

  Il circocentro del tetraedro è pertanto il punto $K(1,3,1)$.

- Che i tre punti M, G, K siano allineati s'intuisce senza fare calcoli. Si capisce subito, infatti, che sono situati sulla retta di equazioni $(y = 3,\ z = 1)$. Basta riflettere sulle loro coordinate.

Si verifica inoltre facilmente che G è il punto medio del segmento MK.

- Un procedimento alternativo che prova, nel medesimo tempo, che i punti M, G, K sono allineati e che G è il punto medio di MK, è il seguente, che lascio a chi legge:
  Si trovano le coordinate del punto K simmetrico di M rispetto a G e si verifica che le distanze di questo punto dai vertici del tetraedro sono uguali. Il che dimostra che il punto trovato K è il centro della sfera circoscritta al tetraedro, vale a dire il circocentro del tetraedro.

7. Normalmente, le altezze di un tetraedro non convergono in un punto, ma quando lo fanno, questo punto si denomina *ortocentro* e il tetraedro si definisce *ortocentrico* [(1)].

PROPRIETÀ 4.

Nel caso in cui il tetraedro sia ortocentrico, il punto di Monge coincide con l'ortocentro H.

Questa proprietà si dimostra facilmente come immediata conseguenza della proprietà 3 e di un'altra proprietà, cui ho avuto modo di accennare nel succitato articolo B e che qui ricordo per comodità:

In un tetraedro ortocentrico, il baricentro G, il circocentro K e l'ortocentro H sono allineati e G è il punto medio del segmento HK.

Di fatto, in base a questa seconda proprietà, risulta: $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{GK}$; mentre, in base alla prima proprietà risulta: $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{GK}$. Di conseguenza: $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{HG}$ e pertanto: M=H. Come si voleva dimostrare.

Ma vediamo qualche verifica.

- Il tetraedro sul quale abbiamo ragionato sopra (figura 2) non è ortocentrico, come si può controllare, per cui non ha senso alcuna verifica riguardo alla proprietà 4.
- È invece ortocentrico il tetraedro di vertici:
  $$A(9,0,0),\ \ B(0,3,0),\ \ C(0,0,12),\ \ D(0,0,0).$$
  Si trova infatti facilmente, in modo banale direi, che le sue altezze concorrono nel punto D, che è pertanto l'ortocentro del tetraedro.

UN ESERCIZIO PER GLI STUDENTI LICEALI.

Trovare le coordinate del punto M di Monge di quest'ultimo tetraedro, di vertici:

$$A(9,0,0),\ \ B(0,3,0),\ \ C(0,0,12),\ \ D(0,0,0).$$

e di verificare che effettivamente questo punto coincide con l'ortocentro del tetraedro.

Propongo inoltre di trovare le coordinate del baricentro G e del circocentro K del tetraedro medesimo e di verificare infine che G è il punto medio del segmento MK.

Non è difficile. Anche i calcoli non sono complicati.

[1] Cfr.: articolo B, citato in premessa.