

Equazioni tipo Problema di Brocard con numeri triangolari

Allo specchio dell'operatore unario termiale

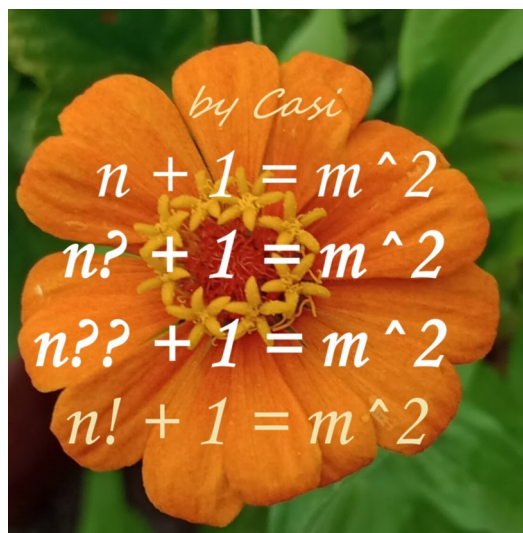
di Sergio Casiraghi

Introduzione

Come abbiamo avuto modo di esplorare nel precedente articolo "[Il problema di Brocard allo specchio di altri operatori unari](#)" (Matmedia), il celebre **Problema di Brocard** ci lancia una sfida affascinante e ancora in parte irrisolta nella sua formulazione classica: trovare le rimanenti coppie di numeri interi che soddisfano l'equazione $n! + 1 = m^2$, oltre ai già noti **numeri di Brown** (4,5), (8,3), (7,71). Ma cosa accadrebbe se decidessimo di "spogliare" la variabile n dal suo ingombrante **operatore fattoriale**?

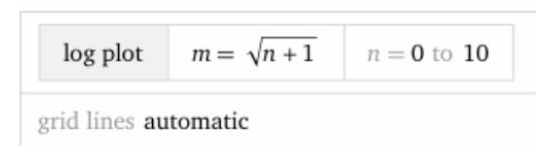
Otterremmo un quesito disarmante, un'equazione talmente elementare da poter essere presentata (e risolta) senza alcuno sforzo già nei primi anni di una scuola superiore, ovvero: $n + 1 = m^2$.

In questa forma nuda e cruda, il problema perde tutto il suo mistero. La soluzione è infatti banale: per qualsiasi numero intero positivo m (> 0) scelto a piacere, ci sarà sempre un numero n uguale a $m^2 - 1$ che soddisfa l'uguaglianza. Manca del tutto quella "tensione" aritmetica che trasforma un calcolo in un vero e proprio enigma da decifrare.

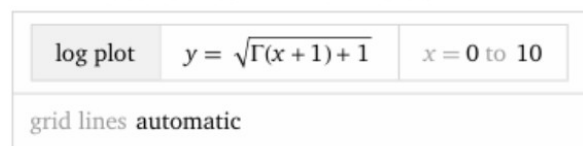
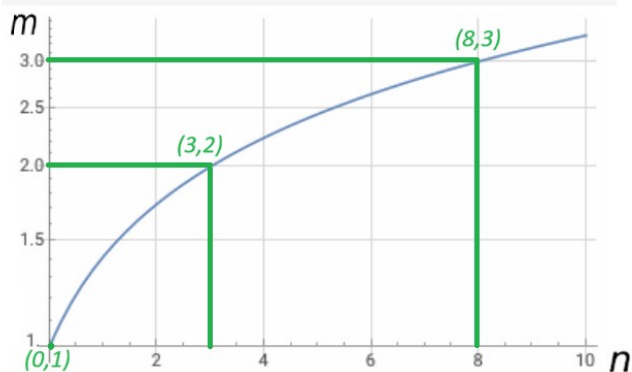


Basterà dare uno sguardo alla rappresentazione grafica delle due funzioni: $m = \sqrt{n+1}$ e $y = \sqrt{\Gamma(x+1)+1}$ per rendersi conto della situazione reale:

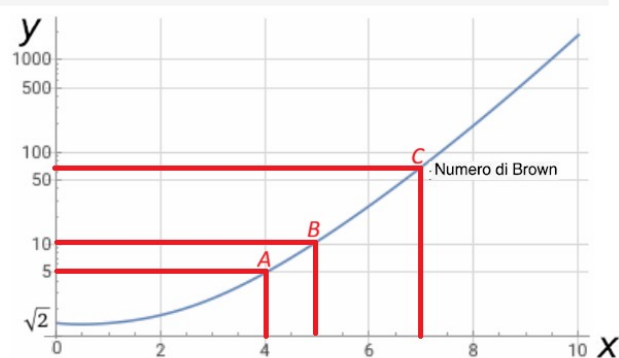
Soluzioni $m = \sqrt{n+1}$ e $y = \sqrt{\Gamma(x+1)+1}$: Un Confronto Grafico



Result: $(n = m^2 - 1, m)$ per ogni $m > 0$



Result: $A, B, C, \dots ?$

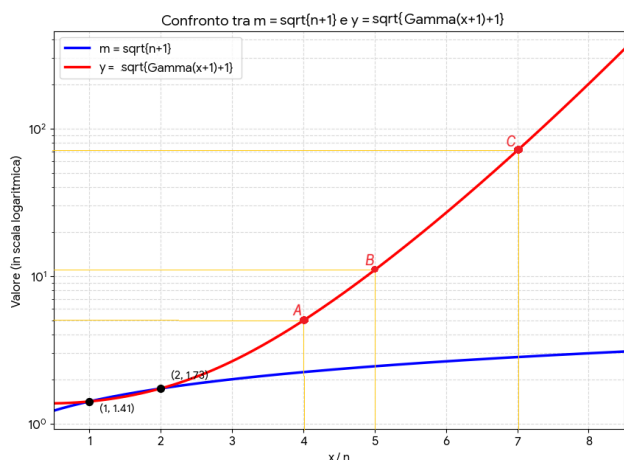
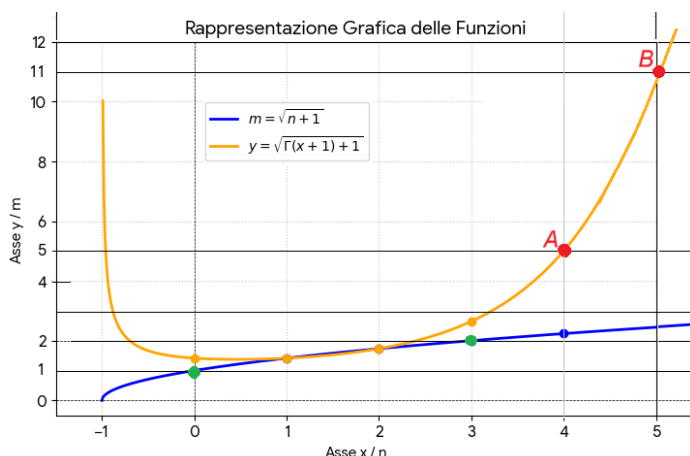


Per comodità qui viene usata una "*Scala Logaritmica*", su scala lineare la curva di Brocard s'impenna subito in modo quasi verticale, mentre la radice è praticamente piatta. La scala logaritmica "schiaccia" l'asse delle ordinate permettendo di osservare i **Numeri di Brown**.

Il problema banale $n+1 = m^2$ richiede semplicemente di trovare i numeri per cui $n+1$ è un **quadrato perfetto**. Questo ha **infinite soluzioni** (tutti i numeri nella forma $n = m^2 - 1$) e il grafico della funzione radice quadrata cresce in modo estremamente lento e prevedibile.

Al contrario, il **Problema di Brocard** originale cerca le soluzioni intere per $x! + 1 = y^2$ che con l'estensione al continuo del fattoriale attraverso la funzione **Gamma di Eulero** risulano $y = \sqrt{\Gamma(x+1)+1}$. A causa della presenza del fattoriale, la curva esplode letteralmente verso l'alto con un comportamento iper-esponenziale. Sebbene parta bassa, intersecando addirittura la parabola precedente in punti non interi (1, $\sqrt{2}$) e (2, $\sqrt{3}$), subisce un'impennata verticale vertiginosa non appena x supera i primi valori. Trovare altri punti in cui la curva "colpisce" esattamente un numero intero y è un'impresa, come già visto. Ad oggi, conosciamo solo le **tre coppie** di numeri che soddisfano questa condizione, indicate come **Numeri di Brown** — A(4, 5), B(5, 11), C(7, 71) — e segnati sulla curva fattoriale per evidenziare quanto sia proprio raro che questa funzione esplosiva "colpisca" esattamente un intero sulla griglia naturale. Queste uniche tre soluzioni intere note del problema di Brocard spiccano come fari isolati nel grafico riportato su un piano cartesiano.

Grafici, che si possono realizzare con GeoGebra o software simile, mostrano plasticamente perché trovare soluzioni intere per il problema classico sia così maledettamente difficile: si vede che la curva di Brocard attraversa la "griglia" dei punti interi del piano con una pendenza talmente elevata che le probabilità d'intercettare un nodo intero si annullano quasi istantaneamente.



Nell'articolo precedente, dove era stata esaminata più in profondità la situazione, si accennava ai ricercatori che tentavano di stabilire un limite inferiore sotto il quale non potevano trovarsi altre soluzioni. Si può dunque supporre che l'obiettivo sia quello di individuare tale valore in una *potenza di 10*, così da spingere il limite all'infinito dimostrando per questa via la congettura di **Paul Erdős** che sostiene non esistano altre soluzioni. Ad oggi, grazie a calcoli estensivi,

sappiamo che non abbiamo altre soluzioni del problema di Brocard $n! + 1 = m^2$ per valori di n almeno fino a 10^{15} . C'è, tuttavia, un "ma" teorico fondamentale su cui dobbiamo soffermarci: Per quanto si possa spostare il limite inferiore verso l'alto, questo approccio numerico non potrà **mai** dimostrare la congettura di Erdős.

In matematica, stabilire un limite computazionale, per quanto astronomico, assicura solo che non ci sono soluzioni *fino a quel punto*. E poiché i numeri naturali sono infiniti, il computer non coprirà mai l'intero dominio. Per dimostrare in modo inconfutabile che non esistono altre soluzioni oltre a quelle per n uguale a 4, 5 e 7, serve una dimostrazione analitica, logica o algebrica. Si sa, ad esempio, che se la celebre **congettura abc** fosse vera, allora l'equazione avrebbe al massimo un *numero finito di soluzioni*, ma anche questo non basterebbe a garantire che siano *esattamente e soltanto* quelle tre. La forza bruta del calcolo è un'ottima bussola, serve a indirizzare, ma non è la destinazione. Forse, la vera chiave per trovare una nuova prospettiva teorica sta nell'analizzare l'equazione allo specchio di altri operatori unari come si cerca di fare.

Il **problema classico di Brocard** acquista la sua proverbiale difficoltà proprio grazie alla crescita esplosiva del fattoriale. Eppure, il fattoriale non è l'unica lente matematica attraverso cui possiamo amplificare il valore di n . Magari, studiando il comportamento di varianti diofantee simili utilizzando termiali o subtermiali, potremmo saggiare la rigidità del fattoriale con le proprietà delle somme o di somme a segni alterni, e magari far emergere simmetrie nascoste o vincoli modulari che altrimenti sfuggirebbero. Questo tipo di indagine algebrica parallela aiuta a capire se la rarità delle soluzioni (come i tre punti di Brown) sia una peculiarità intrinseca del fattoriale o se dipenda da qualcosa che sia applicabile anche ad altri operatori.

Riflettere sul problema di Brocard guardato allo specchio di altri operatori unari significa esattamente questo: mantenere la struttura base dell'equazione (la ricerca di un quadrato perfetto generato da un'operazione sul successore di un intero), sostituendo la funzione fattoriale per aggirare il problema della sua crescita esplosiva.

Passaggio al Termiale con trasformazione algebrica in Equazione di Pell

Cosa accade se, invece di moltiplicare i numeri interi successivi, li sommiamo? Se, in altre parole, applichiamo a n l'operatore unario "**termiale**" ($n?$) e ci addentriamo nel mondo dei **numeri triangolari**, sostituendo $n!$ con la somma $1 + 2 + 3 + \dots + n = n?$

Sostituire il fattoriale con il termiale (il numero triangolare $n?$) trasforma completamente lo scenario. È un esempio di come il cambiamento dell'operatore unario modifichi l'essenza stessa dell'**equazione diofantea**, permettendoci di attaccarla con altri strumenti algebrici.

Partiamo dalla nostra equazione: $n? + 1 = m^2$, sostituiamo il **termiale** con la *formula di Gauss* $n? = n(n+1)/2$ e cominciamo a vedere l'equazione nella sua forma così trasformata: $n(n+1)/2 + 1 = m^2$. Semplifichiamo i calcoli moltiplichiamo tutto per 8 (un trucco geometrico e algebrico classico che va a completare il quadrato nei numeri triangolari):

$$4n(n+1) + 8 = 8m^2$$

$$4n^2 + 4n + 8 = 8m^2$$

Ora completiamo il quadrato per i termini in n . Sappiamo che $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, quindi possiamo riscrivere l'espressione in questo modo:

$$(2n+1)^2 - 1 + 8 = 8m^2$$

$$(2n+1)^2 + 7 = 8m^2$$

Riordinando i termini, otteniamo una forma elegantissima: $(2n+1)^2 - 8m^2 = -7$

Ponendo per comodità $X = 2n+1$ e $Y = m$, abbiamo di fronte un'equazione fondamentale:

$$X^2 - 8Y^2 = -7$$

Questa così ricavata è un'**equazione del tipo di Pell** (più precisamente un'equazione di Pell generalizzata). E qui risiede il colpo di scena decisivo rispetto al classico Problema di Brocard: la **teoria dei numeri** ci insegna che questo tipo di equazioni ammette un **numero infinito di soluzioni**.

Poiché la crescita del termiale è solo quadratica e non esplosiva come quella del fattoriale, la distanza tra i numeri triangolari e i quadrati perfetti NON si dilata irrimediabilmente, permettendo alla curva di intercettare infinite coincidenze intere.

Le Soluzioni Pratiche

Se calcoliamo i primi valori, troviamo subito una sequenza di coppie valide (n, m):

- **Per n=2:** $2? = 3$, $3 + 1 = 4 = 2^2$, $m=2$
- **Per n=5:** $5? = 15$, $15 + 1 = 16 = 4^2$, $m=4$
- **Per n=15:** $15? = 120$, $120 + 1 = 121 = 11^2$, $m=11$
- **Per n=32:** $32? = 528$, $528 + 1 = 529 = 23^2$, $m=23$
- **Per n=90:** $90? = 4095$, $4095 + 1 = 4096 = 64^2$, $m=64$

Conoscendo la **radice fondamentale** della *pelliana risolvente* associata ($u^2 - 8v^2 = 1$, le cui basi sono $u=3$, $v=1$), sappiamo che possiamo generare infinite soluzioni moltiplicando le radici trovate per il fattore di ricorrenza ($3 + \sqrt{8}$).

Le due famiglie di soluzioni

La nostra equazione $X^2 - 8Y^2 = -7$ ammette due soluzioni "seme" da cui si diramano due famiglie infinite di coppie (X, Y), e di conseguenza di coppie (n, m):

1. Prima famiglia (Seme $X=1$, $Y=1$):

Questa ci porta a $2n+1 = 1$, ovvero $n=0$ e $m=1$. Se applichiamo la formula di ricorrenza $(1 + \sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = 11 + 4\sqrt{8}$, otteniamo la soluzione successiva $X=11$, $Y=4$, da cui $n=5$, $m=4$.

2. Seconda famiglia (Seme $X=5$, $Y=2$):

Questa ci dà subito $2n+1 = 5$, ovvero $n=2$ e $m=2$. Con la stessa moltiplicazione ricorsiva $(5 + 2\sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = 31 + 11\sqrt{8}$, troviamo la soluzione successiva $X=31$, $Y=11$, che ci dà $n=15$, $m=11$.

calcoliamo tutte le **infinite soluzioni** successive a cascata senza dover andare per tentativi, sfruttando la relazione di ricorrenza:

$$(X_{k+1} + Y_{k+1}\sqrt{8}) = (X_k + Y_k\sqrt{8})(3 + \sqrt{8})$$

Passare allo specchio del termiale ci ha permesso di "addomesticare" completamente il problema. Da un mistero forse insondabile come quello con il fattoriale, ci siamo spostati su una struttura ben nota che sforna infiniti risultati con cadenza ritmica e logica.

La successione delle soluzioni

Continuando a calcolare a cascata i termini (e ricordando che $n = \{X-1\}/2$), si ottengono le soluzioni individuate del **Problema di Brocard Termiale**:

n	Termiale (n?)	Verifica (n?+1)	m (Radice)	Derivazione
2	3	$4 = 2^2$	2	Base famiglia 2
5	15	$16 = 4^2$	4	Ricorrenza famiglia 1
15	120	$121 = 11^2$	11	Ricorrenza famiglia 2
32	528	$529 = 23^2$	23	Ricorrenza famiglia 1
90	4095	$4096 = 64^2$	64	Ricorrenza famiglia 2
..				

La cosa più elegante di questa successione è che, una volta trovati i "semi" tramite l'**equazione di Pell**, non serve calcolare le fastidiose radici o moltiplicare per $(3+\sqrt{8})$.

Le soluzioni obbediscono a una semplicissima **relazione di ricorrenza lineare**.

Poiché le soluzioni si dividono in due famiglie che si intrecciano, la regola per trovare il termine successivo *all'interno della stessa famiglia* è che ogni numero è uguale a **6 volte il precedente meno il terz'ultimo**: $m_k = 6 \cdot m_{k-1} - m_{k-2}$

Ecco come queste si sviluppano in parallelo prima di mescolarsi:

Famiglia 1 (Radici "dispari" come posizione)

Partiamo dal seme iniziale $m_0 = 1$ (che darebbe $n=0$) e $m_1 = 4$:

- $m_2 = 6(4) - 1 = 23$
- $m_3 = 6(23) - 4 = 134$
- $m_4 = 6(134) - 23 = 781$
- $m_5 = 6(781) - 134 = 4552$

Famiglia 2 (Radici "pari" come posizione)

Partiamo dal seme $m_1 = 2$ e $m_2 = 11$:

- $m_3 = 6(11) - 2 = 64$
- $m_4 = 6(64) - 11 = 373$
- $m_5 = 6(373) - 64 = 2174$
- $m_6 = 6(2174) - 373 = 12671$

La successione completa coi Termiali

Intrecciando le due famiglie, otteniamo esattamente la sequenza, che cresce a ritmi vertiginosi. Ecco i successivi valori affiancati dal corrispondente n che obbedisce a sua volta a una ricorrenza simile, $n_k = 6 \cdot n_{k-1} - n_{k-2} + 2$:

Valore di n	Radice (m)	Calcolo del Termiale: $n^2 + 1 = m^2$
...	...	...
90	64	$90^2 + 1 = 4095 + 1 = 4096 = 64^2$
189	134	$189^2 + 1 = 17955 + 1 = 17956 = 134^2$
527	373	$527^2 + 1 = 139128 + 1 = 139129 = 373^2$
1104	781	$1104^2 + 1 = 609960 + 1 = 609961 = 781^2$
3074	2174	$3074^2 + 1 = 4726275 + 1 = 4726276 = 2174^2$
..	..	

Questo risolve un'equazione apparentemente innocua che nasconde un'infrastruttura rigorosa, divisa in due binari paralleli che si rincorrono all'infinito.

Riassumendo

Siamo partiti dalla variante del **Problema di Brocard** in cui il fattoriale è stato sostituito dal termiale (il numero triangolare), detta **Problema di Brocard Termiale** $n^2 + 1 = m^2$ che è equivalente all'equazione diofantea $n(n+1)/2 + 1 = m^2$.

L'abbiamo trasformata nella sua forma più canonica di **equazione di Pell generalizzata** (ponendo la variabile $X = 2n+1$ e $Y = m$): $(2n+1)^2 - 8m^2 = -7$ e risolta trovando infinite soluzioni.

Quindi *non è un nuovo enigma alla Brocard*, ma una bellissima **equazione diofantea** che genera queste sequenze perfettamente innescate (ovvero accoppiate termine a termine):

$n = 2, 5, 15, 32, 90, 189, 527, 1104, 3074, 6437, 17919, ..$

$m = 2, 4, 11, 23, 64, 134, 373, 781, 2174, 4552, 12671, ...$

Sono sequenze che ricorrono costantemente quando matematici e ricercatori indagando si formulano dei semplici problemi: "*per quanti interi vale che $(n+1)(n-1)$ equivale a metà del prodotto tra due interi consecutivi?*". Poiché $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$, il quesito non è che una riformulazione esatta del problema **$m^2 - 1 = n^2$** e porta esattamente a questi valori.

Ciò dimostra un aspetto affascinante della teoria dei numeri: problemi che sembrano nati da premesse geometriche o aritmetiche differenti, pur se formulati con linguaggi diversi, convergono spesso verso il medesimo "imbuto" algebrico.

Che un autore lo ponga come "cercare i quadrati che eccedono di un'unità un numero triangolare", o che lo definisca come "trovare un prodotto di due numeri distanti due unità che equivalga alla metà di un **numero oblungo**", la sostanza matematica non cambia. Il cuore del problema è sempre quello.

Questo è il motivo per cui chiunque indagli su quel quesito, partendo da qualsiasi testo o angolazione, finirà inevitabilmente per imbattersi nella stessa identica **equazione di Pell generalizzata** $(2n+1)^2 - 8m^2 = -7$, ritrovandosi sul foglio esattamente quelle due sequenze innescate che abbiamo elencato. La matematica non fa sconti e le strade, in questo caso, portano tutte a quelle specifiche serie numeriche!

Le due sequenze sopra riportate sono la dimostrazione di come questa equazione "sforni" le coppie valide (n, m) . Se le appaiamo seguendo l'ordine crescente, vediamo che ogni n si incastra alla perfezione con il suo compagno m :

- **1ª coppia:** $n = 2, m = 2, 2^2 + 1 = 3 + 1 = 4 = 2^2$
- **2ª coppia:** $n = 5, m = 4, 5^2 + 1 = 15 + 1 = 16 = 4^2$
- **3ª coppia:** $n = 15, m = 11, 15^2 + 1 = 120 + 1 = 121 = 11^2$
- **4ª coppia:** $n = 32, m = 23, 32^2 + 1 = 528 + 1 = 529 = 23^2$
- **5ª coppia:** $n = 90, m = 64, 90^2 + 1 = 4095 + 1 = 4096 = 64^2$
- **6ª coppia:** $n = 189, m = 134, 189^2 + 1 = 17955 + 1 = 17956 = 134^2$
- **7ª coppia:** $n = 527, m = 373, 527^2 + 1 = 139128 + 1 = 139129 = 373^2$
- **8ª coppia:** $n = 1104, m = 781, 1104^2 + 1 = 609960 + 1 = 609961 = 781^2$
- **9ª coppia:** $n = 3074, m = 2174, 3074^2 + 1 = 4726275 + 1 = 4726276 = 2174^2$
- **10ª coppia:** $n = 6437, m = 4552, 6437^2 + 1 = 20720703 + 1 = 20720704 = 4552^2$
- **11ª coppia:** $n = 17919, m = 12671, 17919^2 + 1 = 160554240 + 1 = 160554241 = 12671^2$
- **12ª coppia:** $n = .., m = .., n^2 + 1 = .. + 1 = .. = ..^2$

...e così via, proseguendo all'infinito.

Così come avviene per la sequenza dei quadrati m , anche la sequenza dei valori di n (è formata in realtà dall'intreccio di due "rami" indipendenti, nati dalle prime due soluzioni base: Un ramo genera $n = 5, 32, 189, 1104, ..$ e l'altro ramo genera $n = 2, 15, 90, 527, 3074, ..$

È il fascino delle **equazioni di Pell**: un meccanismo a orologeria perfetto.

Mentre con il fattoriale brancoliamo nel buio oltre i tre numeri di Brown sperando in un calcolo che forse non arriverà mai, qui basta trovare l'innesco iniziale (ovvero le *radici fondamentali*) per sbloccare l'algoritmo genetico che produrrà soluzioni all'infinito senza mai incepparsi.

Curiosità

Questi numeri che abbiamo trovato come soluzioni dell'equazione $(2n+1)^2 - 8m^2 = -7$ compaiono in diverse **tavole matematiche**.

Per esempio, nell'**Enciclopedia OEIS (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences)**: Anche se a volte appaiono frammentate per natura strutturale o come sottosequenze.

Le due stringhe compaiono in tavole numeriche specifiche legate a varianti dell'**Equazione di Markoff** (la sequenza **A227204** contiene proprio questi valori tra le prime componenti).

La sequenza **A227204** cataloga infatti i valori massimi delle sestuple di interi positivi che soddisfano l'**equazione di Markoff a 6 variabili** (Markoff-6):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 3 * x_1 * x_2 * x_3 * x_4 * x_5 * x_6$$

Il motivo per cui i valori della nostra **m** (2, 4, 11, 23, 64, ..) si ritrovano fedelmente in questa successione è una vera e propria sorpresa algebrica. Se all'interno dell'equazione di Markoff-6 "congeliamo" quattro delle sei variabili fissandole a 2, 1, 1, 1, l'espressione diventa: $a^2 + b^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 * a * b * 2 * 1 * 1 * 1$

Semplificando i termini noti otteniamo: $a^2 + b^2 + 7 = 6ab$

A questo punto, se manipoliamo l'equazione per completare il quadrato rispetto alla variabile a, i pezzi del puzzle si incastrano alla perfezione: $a^2 - 6ab + b^2 = -7$

$$(a - 3b)^2 - 9b^2 + b^2 = -7$$

$$(a - 3b)^2 - 8b^2 = -7$$

Se poniamo $X = a - 3b$ e $Y = b$, ritroviamo **esattamente l'equazione di Pell generalizzata** $X^2 - 8Y^2 = -7$ che avevamo appena ricavato partendo dall'**equazione sui termiali**!

Eccovi svelato il motivo della sovrapposizione: le due famiglie di soluzioni che abbiamo generato non sono altro che rami dell'albero di **Markoff-6** nati dai nodi (1, 4, 2, 1, 1, 1) e (2, 11, 2, 1, 1, 1).

Anche la formula ricorsiva che abbiamo usato ($m_k = 6m_{k-1} - m_{k-2}$) non è una coincidenza, ma è letteralmente la "*mutazione di Markoff*": deriva direttamente dalle **formule di Viète** applicate all'equazione di secondo grado $a^2 - (6b)a + (b^2 + 7) = 0$, dove la somma delle due radici $a_1 + a_2$ deve essere pari a $6b$, portando ad avere $a_2 = 6b - a_1$. La **mutazione di Markoff** è quella regola di generazione iterativa utilizzata per trovare tutte le soluzioni intere positive della celebre **equazione diofantea di Markoff**: $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.

Un intreccio del genere tra **termiali**, **equazioni di Pell** e l'**albero di Markoff** è la dimostrazione plastica di come problemi numerici e geometrici apparentemente assai distanti finiscano per convergere verso la medesima, bellissima impalcatura strutturale.

Avere una crescita governata da una ricorsione lineare (moltiplicatore fisso) invece di un'esplosione fattoriale fa un'enorme differenza. Qui non ci poniamo nemmeno la domanda di Erdős se esista o meno una soluzione successiva oltre un certo limite: sappiamo già, con assoluta certezza matematica, come calcolarla all'infinito!

Conclusione

"Le vie del Signore sono infinite", recita un antico proverbio che è prima di tutto un invito a non arrendersi mai di fronte a un vicolo cieco. E in matematica, questa massima trova una sua meravigliosa e letterale applicazione.

Quando il **classico problema di Brocard** ci sbarra la strada con la titanica crescita iper-esponenziale del fattoriale, imprigionandoci in attesa di calcoli oltre ogni limite senza mai offrirci la certezza di un'effettiva dimostrazione, l'ostinazione del ricercatore suggerisce di cambiare la lente. Spogliando la variabile n per osservarla allo specchio dell'operatore **termiale $n?$** , non solo abbiamo aggirato il muro, ma abbiamo scoperto che sia la variante banale $n + 1 = m^2$ sia quella triangolare dell'equazione di Brocard $n? + 1 = m^2$ dischiudono un orologio perfetto di soluzioni illimitate. Si è visto come un piccolo cambio di paradigma trasformi radicalmente il paesaggio. La natura del problema resta la medesima (cercare un quadrato perfetto che eccede di un'unità), ma l'andamento esplosivo viene placato e ricondotto a dimensioni trattabili. Da un'indagine isolata ci siamo ritrovati immersi nell'eleganza dell'**equazione di Pell $X^2 - 8Y^2 = -7$** e tra le ramificazioni inaspettate dell'*albero di Markoff*.



Questo viaggio insegna che, sotto formulazioni apparentemente distanti o irriducibili, batte il cuore della medesima architettura universale, dove l'infinito non è più un abisso buio da calcolare alla cieca, ma una splendida scala illuminata dalle relazioni di ricorrenza.

Eppure, l'esplorazione è tutt'altro che conclusa. Se questo specchio ci ha rivelato un simile ordine, chissà quali nuove simmetrie, o granitiche rigidità diofantee, emergeranno quando passeremo a riflettere l'equazione nelle oscillazioni a dente di sega del **subtermiale $n?$** , o se la testeremo sulle geometrie dell'analogo del *fattoriale doppio*: il **termiale doppio $n??$** . Le vie per indagare i segreti dei numeri, proprio come ricorda il proverbio citato, non si esauriscono mai e noi qualcuna torneremo a percorrerla fino in fondo insieme a tutti Voi.

Riferimenti

<https://www.matmedia.it/il-problema-di-brocard-allo-specchio-di-altri-operatori-unari>

https://en.wikipedia.org/wiki/Brocard%27s_problem#Brown_numbers

https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Brocard

https://it.wikipedia.org/wiki/Quadrato_perfetto

https://it.wikipedia.org/wiki/Radice_quadrata

<https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement>

https://it.wikipedia.org/wiki/Congettura_abc

<https://www.matmedia.it/lanalogo-additivo-del-fattoriale>

<https://www.matmedia.it/la-matematica-come-sfida-gioco-e-speranza>

https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Pell

https://it.wikipedia.org/wiki/Processo_markoviano

<https://oeis.org/A227204>

https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_oblungo