SESSIONE SUPPLETIVA 2026
SECONDA PROVA SCRITTA

PROBLEMA 2.

Si considerino:

$y = f(x)$ derivabile in $\mathbb{R}$ con grafico γ_1

$g(x) = -\frac{1}{f(x)}$ con grafico γ_2

$h(x) = f(x) + g(x)$ con grafico γ_3

a) hp: α, β zeri di $f(x)$ $\Rightarrow$ th: $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono asintoti di $g(x)$ e $h(x)$

DIMOSTRAZIONE: Se α e β sono zeri per $f(x)$ vuol dire che $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Per far sì che $x = \alpha$ sia asintoto verticale di $g(x)$ e $h(x)$ si deve dimostrare che:

$$\lim_{x \to \alpha} g(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \alpha} h(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \alpha} h(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) + g(x) = 0 \pm \infty = \pm\infty$$

$x = \alpha$ è asintoto verticale di $g(x)$ e $h(x)$.

Seguendo lo stesso ragionamento si dimostra che $x = \beta$ è asintoto verticale di $g(x)$ e $h(x)$:

$$\lim_{x \to \beta} g(x) = \lim_{x \to \beta} -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \beta} h(x) = \lim_{x \to \beta} f(x) + g(x) = 0 \pm \infty = \pm\infty$$

$x = \beta$ è asintoto verticale di $g(x)$ e $h(x)$

Per spiegare che γ_1 non ha punti in comune con γ_2 e con γ_3 vorrebbe dire far vedere che $f(x)$ non è uguale a $g(x)$ e a $h(x)$ in nessun punto.

γ_1 non ha punti in comune con γ_2:

Si pone $f(x) = g(x)$

$$f(x) = -\frac{1}{f(x)} \rightarrow f(x)^2 = -1$$

$f(x)^2$ è sempre positivo quindi questa equazione non ha nessun valore reale.

γ_1 non ha punti in comune con γ_3:

Si pone $f(x) = h(x)$

$$f(x) = f(x) + g(x) \rightarrow g(x) = 0 \rightarrow -\frac{1}{f(x)} = 0$$

Una frazione è pari a 0 quando il numeratore è nullo.

Si vuol concludere il punto a) dimostrando che:

hp: Se x_S è stazionario per $f(x)$, $f(x_S) \neq 0$

$\Rightarrow$ th: x_S è stazionario per $g(x)$ e $h(x)$.

DIMOSTRAZIONE: Dire che x_S è stazionario per $f(x)$ vuol dire che $f'(x_S) = 0$, cioè annulla la derivata prima.

Per dimostrare che è stazionario per $g(x)$ e $h(x)$ devo far vedere che $g'(x_S) = 0$ e $h'(x_S) = 0$.

$$g'(x) = +\frac{1}{[f(x)]^2} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$g'(x_S) = \frac{f'(x_S)}{\underbrace{[f(x_S)]^2}_{\neq 0}} = 0$$

x_S è stazionario per $g(x)$.

Si valuta $h'(x_s)$:

$h'(x) = f'(x) + g'(x)$

$h'(x_s) = f'(x_s) + g'(x_s) = 0 + 0 = 0$

x_s è stazionario anche per $h(x)$.

b) $f(x)$ è un polinomio di II° quindi l'espressione generale si scrive:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Si devono trovare i tre parametri a, b, c quindi servono tre condizioni; date dal problema.

- $f(0) = -1$

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -1 \rightarrow c = -1$$

- $x = -1$ è asintoto per r_2, vuol dire che:

$$\lim_{x \to -1} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1} -\frac{1}{f(x)} = \infty$$

Far tendere $-1/f(x)$ all'∞, significa che

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 \rightarrow f(-1) = 0$$

$$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c =$$

$$= a - b - 1 = 0$$

$$\rightarrow a = b - 1$$

- $x = -\frac{1}{4}$ è stazionario per $h(x)$.

Significa che $h'\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) =$$

$$= f'(x) + \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} =$$

$$= 2ax + b + \frac{2ax+b}{[ax^2+bx+c]^2}$$

$$h'\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + b + \frac{2\cdot a\left(-\frac{1}{4}\right)+b}{\left[a\cdot\frac{1}{16} + b\left(-\frac{1}{4}\right) - 1\right]^2} = 0$$

$$= \left(-\frac{1}{2}a + b\right)\left(\frac{1}{16}a - \frac{1}{4}b - 1\right)^2 + -\frac{1}{2}a + b = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}a + b\right)\left[\left(\frac{1}{16}a - \frac{1}{4}b - 1\right)^2 + 1\right] = 0$$

Siccome $\left[\left(\frac{1}{16}a - \frac{1}{4}b - 1\right)^2 + 1\right]$ è la somma di un quadrato con un numero positivo, questo è sempre positivo $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Per la legge dell'annullamento del prodotto, si annulla solo se il 1° fattore è nullo:

$$\left(-\frac{1}{2}a + b\right) = 0 \iff +\frac{1}{2}a = +b \iff a = 2b$$

Si arriva al seguente sistema di tre condizioni:

$$\begin{cases} c = -1 \\ a = b+1 \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2b = b+1 \\ b = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

L'espressioni analitiche sono le seguenti:

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$g(x) = -\frac{1}{2x^2+x-1}$$

$$h(x) = 2x^2 + x - 1 - \frac{1}{2x^2+x-1}$$

c) Per tracciare il grafico γ_1, si studia la funzione $f(x)$:

$f(x) = 2x^2 + x - 1$

DOMINIO: È una funzione polinomiale

$D_f: \mathbb{R}$

SIMMETRIA: $f(-x) = 2(-x)^2 + (-x) - 1$

$= 2x^2 - x - 1$

non è né pari né dispari.

INTERSEZIONI: asse x

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x^2 + x - 1 \end{cases}$$

$2x^2 + x - 1 = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$$

$A(-1; 0)$ $B(\frac{1}{2}; 0)$ sono punti di intersezione di $f(x)$ con asse x.

$\uparrow \alpha$ $\uparrow \beta$ Sono gli zeri α e β.

asse y:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$$

$C(0; -1)$ è l'intersezione di $f(x)$ con l'asse y.

SDS: Si impone $f(x) > 0$

$2x^2 + x - 1 > 0$

Utilizzando gli zeri già trovati, si ha:

$f(x)$ è positiva per $x < -1 \cup x > 1/2$

$f(x)$ è negativa per $-1 < x < 1/2$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO.

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 + x - 1 = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2x^2 + x - 1 = +\infty - \infty \quad \text{F. I.}$$

$+\infty - \infty$ è una forma indeterminata ma essendo un polinomio vince il termine di grado più grande.

$$\lim_{x \to -\infty} 2x^2 + x - 1 = \lim_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty$$

CRESCENZA/DECRESCENZA.

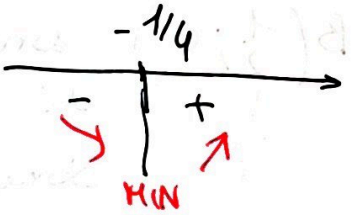
$f(x)$ è un polinomio di II° quindi il suo grafico è una parabola. Ø massimo assoluto ma, avendo concavità verso l'alto, ha un minimo che coincide con il suo vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{2a}\right) \Rightarrow V\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$$

Analiticamente:

$$f'(x) = 4x + 1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{4}$$



$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$$

$V\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$ è un minimo per $f(x)$.

ASINTOTI:

Siccome $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ sicuramente non ci sono asintoti orizzontali.

Dal fatto che $D: \mathbb{R}$ non trovo punti di dubbia continuità quindi non ci sono asintoti verticali.

Per gli obliqui si calcola:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x} = +\infty$$

non sono presenti asintoti obliqui.

CONCAVITA':

$f''(x) = 4 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ quindi $f(x)$ non presenta cambi di concavità.

Per dedurre i grafici γ_2 e γ_3 a partire da $g(x)$:

$$g(x) = -\frac{1}{f(x)}$$

Quindi $g(x)$ è l'antireciproco di $f(x)$:

$D_g: \mathbb{R} - \{-1; \frac{1}{2}\}$

Non presenta intersezioni con l'asse x.

Con l'asse y invece: $g(0) = -\frac{1}{2 \cdot 0 + 0 - 1} = 1$

$D(0;1)$ è l'intersezione di $g(x)$ con asse y.

Il segno "meno" fa invertire la positività di $g(x)$ rispetto a $f(x)$:

$g(x) < 0$ per $x < -1 \cup x > 1/2$

$g(x) > 0$ per $-1 < x < 1/2$

La reciprocità permette di dire che:

- se $f(x) \to 0$ $g(x) \to \infty$ $\Rightarrow$ gli zeri di $f(x)$ diventano asintoti verticali di $g(x)$

  $x = -1$ e $x = 1/2$ sono asintoti verticali per $g(x)$

- se $f(x) \to \infty$ $g(x) \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

  $y = 0$ è asintoto orizzontale per $g(x)$.

La reciprocità inverte la crescenza (se f cresce, $1/f$ decresce) ma la presenza del segno negativo la inverte nuovamente

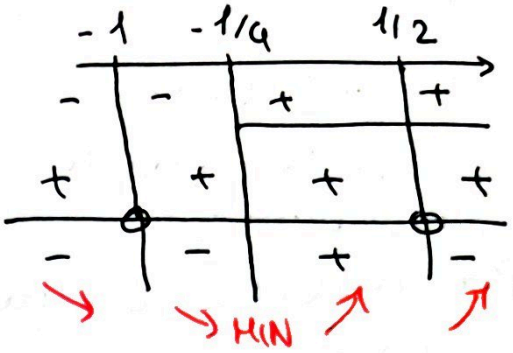
$\Rightarrow$ $g(x)$ mantiene la stessa monotonia di $f(x)$.

analiticamente:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{4x+1}{(2x^2+x-1)^2} > 0$$

N: $4x+1>0 \rightarrow x>-1/4$

D: $(2x^2+x-1)^2>0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{-1; \frac{1}{2}\}$



$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{f\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-1}{-\frac{9}{8}} = +\frac{8}{9}$$

$M\left(-\frac{1}{4}; +\frac{8}{9}\right)$ è minimo per $g(x)$.

Per graficare γ_3 si nota che $h(x)$ è somma delle due funzioni precedenti:

D_h: $\mathbb{R} - \{-1; \frac{1}{2}\}$

Per l'intersezione con asse y:

$$h(0) = 2\cdot 0 + 0 - 1 - \frac{1}{2\cdot 0 + 0 - 1} = -1 - \frac{1}{-1} = -1+1 = 0$$

$O(0;0)$

Con l'asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x^2+x-1 - \frac{1}{2x^2+x-1} \end{cases} \rightarrow 2x^2+x-1-\frac{1}{2x^2+x-1} = 0$$

$$\frac{(2x^2+x-1)^2 - 1}{2x^2+x-1} = 0$$

$(2x^2+x-1)^2-1$ lo si scrive usando il prodotto notevole somma per differenza:

$$(2x^2+x-1-1)(2x^2+x-1+1) = 0$$

$$(2x^2+x-2)(2x^2+x) = 0$$

$2x^2+x=0$

$x(2x+1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=-1/2 \end{cases}$ $E(-1/2;0)$

$2x^2 + x - 2 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 16 = 17$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ $\quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \sim -1,28 \quad F\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$

$\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \sim 0,78 \quad G\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$

Per gli asintoti:

- $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ sono asintoti verticali per $h(x)$
- all'∞ $h(x)$ segue $f(x)$ in quanto esso va all'∞ mentre $g(x)$ va a 0.

$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ non ammette asintoti orizzontali.

Si comprende che γ_3 tenderà a $+\infty$ affiancandosi, non toccando mai, all'andamento di γ_1.

- non ammette asintoti obliqui perché:

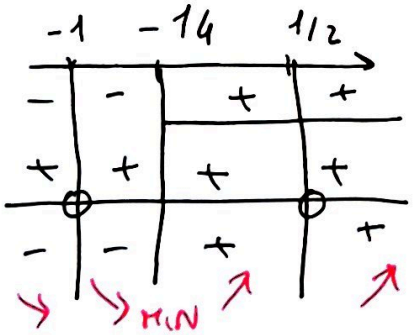
$m = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}^{\to\infty} + \frac{g(x)}{x}^{\to 0} = \infty + 0 = \infty$

Infine essendo somma di funzioni che relativamente a crescenza e decrescenza si comportano allo stesso modo, $h(x)$ si comporterà egualmente.

Analiticamente:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) = f'(x) + \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = f'(x)\left(1 + \frac{1}{[f(x)]^2}\right) > 0$$

$1 + \frac{1}{[f(x)]^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) > 0 \iff 4x + 1 > 0 \leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$

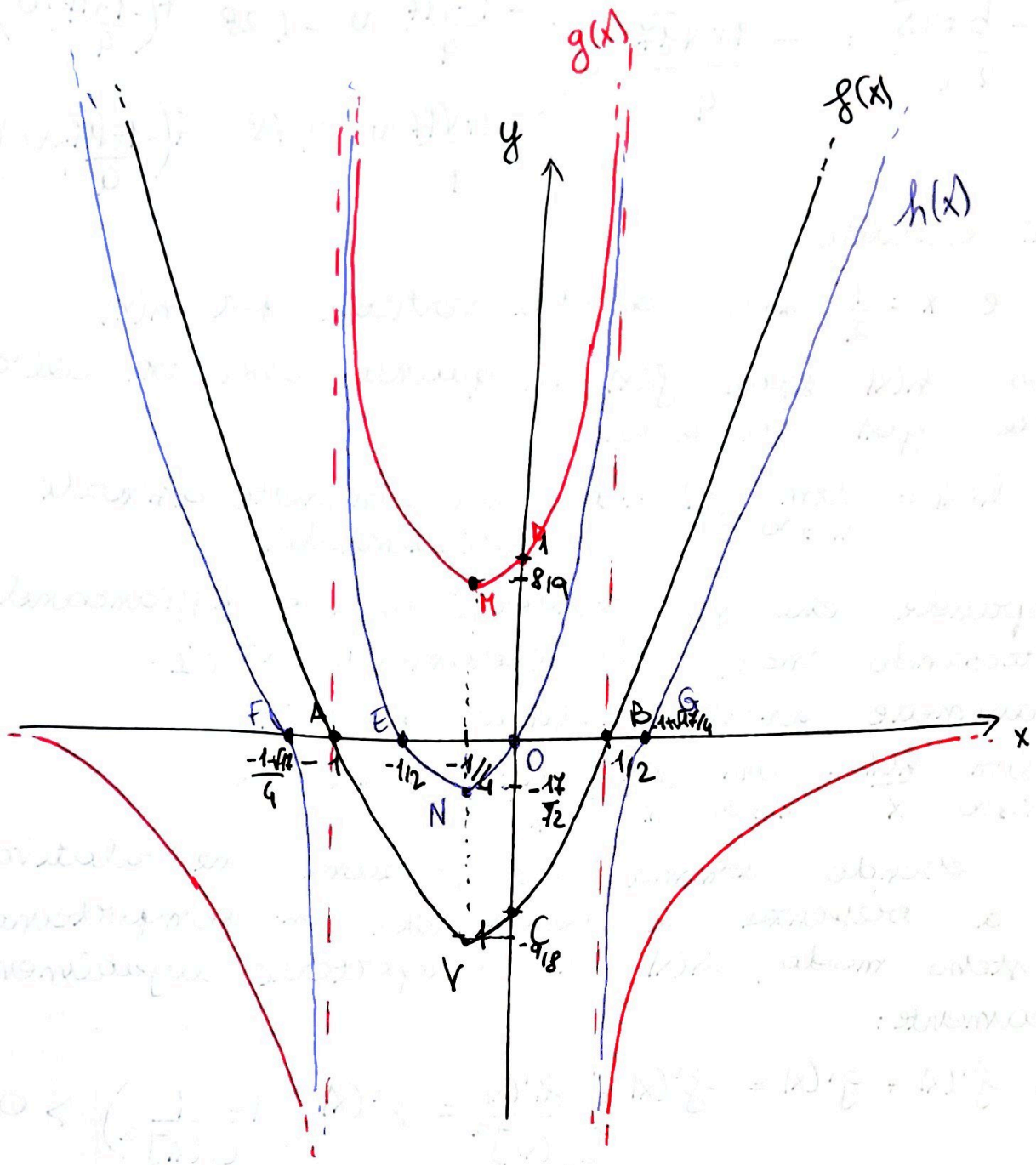


$h\left(-\frac{1}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) + g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8} + \frac{8}{9} = -\frac{17}{72} \sim -0,24$

$h(x)$ è decrescente per $x < -\frac{1}{4} \cup x \neq -1$

è crescente per $x > -\frac{1}{4} \cup x \neq \frac{1}{2}$

$N\left(-\frac{1}{4}; -\frac{17}{72}\right)$ è minimo per $h(x)$



Dal grafico si evince che $g(x)$ non presenta flessi, invece $h(x)$ presenta flessi in

$F\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ e $G\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$

d) $A, B \in \mathbb{R}$? t.c. $g(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$

$$g(x) = -\frac{1}{2x^2+x-1}$$

$$-\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} \qquad \text{C.E: } x \neq -1,\ x \neq 1/2$$

Si procede calcolando il m.c.m. per poi uguagliare i numeratori; si nota che:

$$2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$$

$$\frac{-1}{2x^2+x-1} = \frac{A(2x-1) + B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$\frac{-1}{2x^2+x-1} = \frac{2Ax - A + Bx + B}{(x+1)(2x-1)}$$

Lavorando sui numeratori con il principio di identità dei polinomi:

$$-1 = x(2A+B) - A + B$$

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A + B = -1 \end{cases}$$

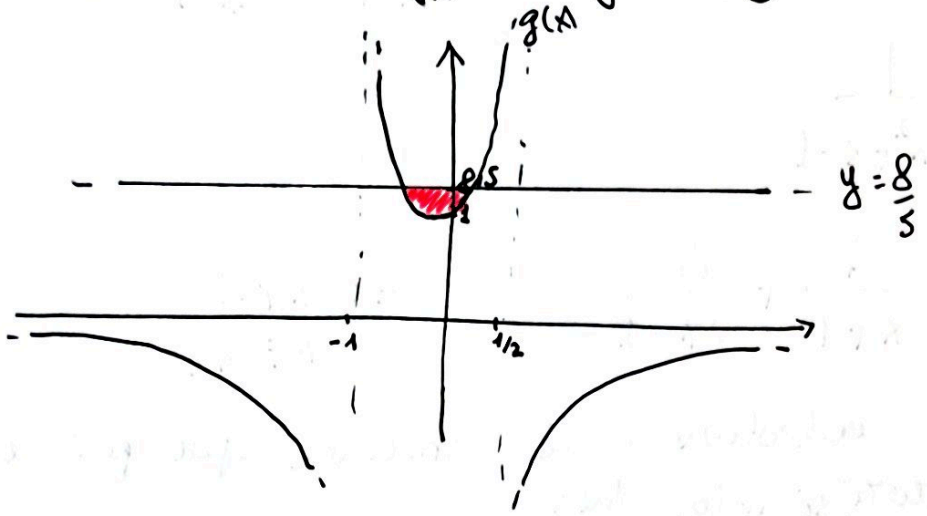
→ uguagliando termini di I° grado

→ uguagliando termini noti

$$\begin{cases} B = -2A \\ -A - 2A = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -2/3 \\ A = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \quad g(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{3(2x-1)}$$

La seconda parte del punto d) richiede il calcolo dell'area tra f_2 e $y = 8/5$



$A = ?$

Per capire gli estremi di integrazione bisogna trovare le intersezioni tra $g(x)$ e $y = 8/5$

$$\begin{cases} y = 8/5 \\ y = -\dfrac{1}{2x^2+x-1} \end{cases} \qquad -\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{-5}{5(2x^2+x-1)} = \frac{8(2x^2+x-1)}{5(2x^2+x-1)}$$

C.E: $2x^2+x-1 \neq 0$

$x \neq -1 \vee x \neq \frac{1}{2}$

$$-5 = 16x^2 + 8x - 8$$

$$16x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 + 192 = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm 16}{32} \begin{cases} \frac{-8-16}{32} = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4} \\ \frac{-8+16}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$A = \int_{-3/4}^{1/4} \left[\frac{8}{5} - g(x) \right] dx$$

$$A = \int_{-3/4}^{1/4} \left[\frac{8}{5} + \frac{1}{2x^2+x-1}\right] dx =$$

$$= \int_{-3/4}^{1/4} \left[\frac{8}{5} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{3(2x-1)}\right] dx =$$

$$= \int_{-3/4}^{1/4} \frac{8}{5} dx + \int_{-3/4}^{1/4} \frac{1}{3(x+1)} dx - \int_{-3/4}^{1/4} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2x-1} dx =$$

$$= \left[\frac{8}{5}x\right]_{-3/4}^{1/4} + \frac{1}{3}\left[\ln|x+1|\right]_{-3/4}^{1/4} - \frac{1}{3}\int_{-3/4}^{1/4} \frac{2}{2x-1} dx =$$

$$= \left[\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4} - \frac{8}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)\right] + \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{1}{4}+1\right) - \ln\left|-\frac{3}{4}+1\right|\right] - \frac{1}{3}\left[\ln|2x-1|\right]_{-3/4}^{1/4} =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\left[\ln\left|2\cdot\frac{1}{4} - 1\right| - \ln\left|2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 1\right|\right]$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{4} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\right) =$$

↙ per le proprietà dei logaritmi

$$= \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{4}\cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\ln(25) =$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\ln(5^2) = \frac{8}{5} + \frac{2}{3}\ln(5)$$

Claudia Mazzella
Monica Arcamone
Rossana Cibelli