QUESITO 3

La legge $C(t) = \ at\ e^{-bt}$ descrive la concentrazione di un farmaco (misurata in mg/l), al variare del tempo (misurato in ore).

Il picco si stima dopo 5 ore dalla somministrazione con un valore di $5{,}5\ \frac{mg}{l}$.

Determinare, con due cifre significative, i valori dei parametri a e b e le loro unità di misura.

Si può affermare che la concentrazione si mantiene al di sopra di $3{,}0\ mg/l$ per oltre 10 ore? Motivare la risposta.

Soluzione

La funzione $at\ e^{-bt}$, nella variabile <<tempo>> , è il prodotto di un termine polinomiale e un termine esponenziale. Poiché quest'ultimo deve risultare adimensionale, il parametro b deve avere le dimensioni dell'inverso di un tempo (misurato in h^{-1}).

La funzione $C(t)$ deve assumere valori positivi per $t > 0$, pertanto deve essere

$a > 0$(unità di misura è $\frac{mg}{l}\,h^{-1}$)

Non può essere $b \leq 0$, altrimenti la funzione sarebbe sempre crescente e non si potrebbe parlare di <<picco>>

Lo studio del segno della derivata

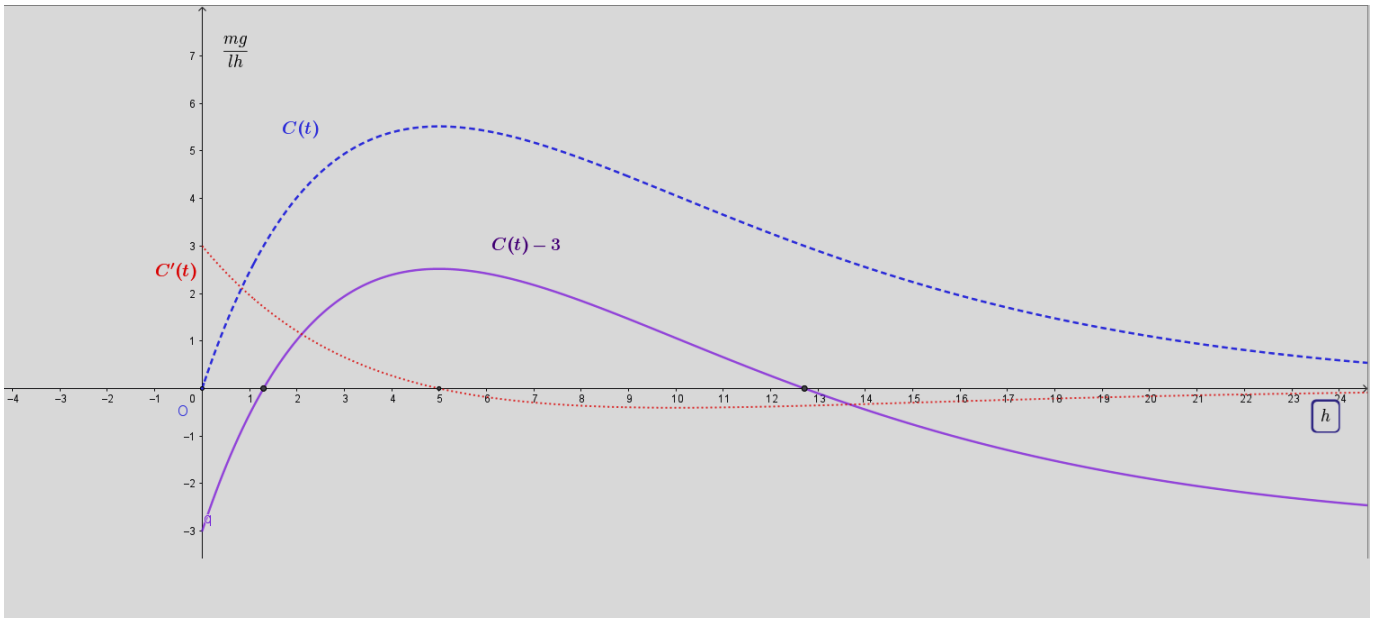
$$C'(t) = ae^{-bt}(1 - bt) \geq 0 \rightarrow t \leq \frac{1}{b}$$

permette di affermare che la concentrazione del farmaco cresce , dall' istante della somministrazione fino all'istante $t = \frac{1}{b}$ e poi inizia a decrescere tendendo asintoticamente a 0 ($\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\infty} \frac{at}{e^{bt}} = 0$ essendo il denominatore un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore)

Poiché Il picco si stima dopo 5 ore dalla somministrazione con un valore di $5{,}5\ \frac{mg}{l}$,

- il valore di b è di circa 0,20 h^{-1}
- il valore di a è uguale a $\frac{5{,}5}{5 \cdot e^{-1}} \cong 3.0\ \frac{mg}{l\,h}$ (approssimazione per eccesso con due cifre significative)

Posto $C(t) = \ 3t\ e^{-\frac{t}{5}}$, per rispondere all'ultimo quesito si devono individuare gli eventuali zeri della funzione $f(t) = 3t\ e^{-\frac{t}{5}} - 3$.



Poiché la funzione $f(t)$ è continua nel suo dominio, , possiamo applicare il teorema di esistenza degli zeri.

Essendo $f(1) = 3e^{-\frac{1}{5}} - 3 \cong -0{,}54 < 0$, $f(2) = 6e^{-\frac{2}{5}} - 1 \cong 1{,}02 > 0$

la funzione ammette uno zero nell'intervallo $[1, 2]$

Ci aspettiamo un altro zero nel tratto decrescente e osserviamo che

$f(12) = 36e^{-\frac{12}{5}} - 3 \cong -0{,}2 > 0$, $f(13) = 39e^{-\frac{13}{5}} - 1 \cong -0{,}10 < 0$

la funzione ammette uno zero nell'intervallo $[12, 13]$

La funzione non ammette altri zeri poiché è derivabile e la sua derivata si annulla una sola volta ,mentre, per il teorema di Rolle, tra due zeri di una funzione derivabile cade sempre almeno uno zero della derivata.

La differenza tra le ascisse dei due zeri è sicuramente maggiore di $12 - 2 = 10$

Si può affermare che la concentrazione si mantiene al di sopra di $3{,}0\ mg/l$ per oltre 10 ore