Quesito 4

Determinare i parametri reali a, b, c in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2-x} + b & x < 2 \\ \frac{x+c}{x} & x \geq 2 \end{cases}$$

sia continua su $\mathbb{R}$ e abbia in $x = 2$ un punto angoloso con tangente sinistra di equazione $y = -3 - 6x$ e tangente destra con pendenza $m = 8$.

Soluzione

La funzione è definita tramite rami di funzioni continue (una esponenziale e un ramo di iperbole equilatera), potrebbe però essere discontinua per $x = 2$.

1. **Imponiamo la continuità in $x = 2$**

$\lim_{x\to 2^-} (ae^{2-x} + b) = a + b$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+c}{x} = \frac{2+c}{2} = f(2)$ la funzione è continua a destra

La funzione è continua su $\mathbb{R}$ se $a + b = \mathbf{\frac{2+c}{2}}$

2. **Per determinare i 3 parametri, imponiamo le altre condizioni :**
   - la tangente sinistra sia $y = -3 - 6x$
   - la tangente destra abbia coefficiente angolare 8

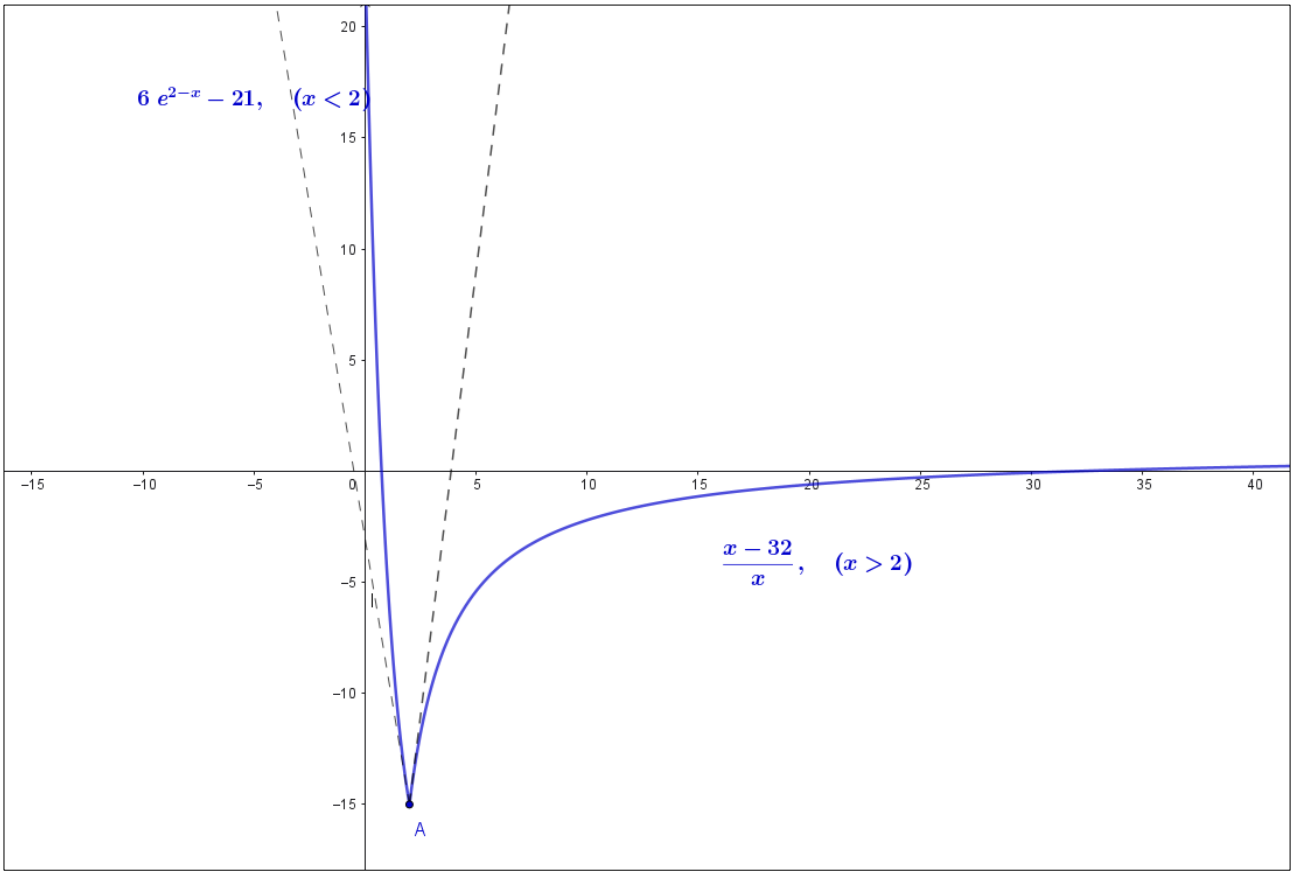
$$f'(x) = \begin{cases} -ae^{2-x} & x < 2 \\ -\frac{c}{x^2} & x \geq 2 \end{cases}$$

Derivata sinistra = $\lim_{x\to 2^-} (-ae^{2-x}) = -6 \to a = 6$

$f'(2)$ =derivata destra = $-\frac{c}{4} = 8 \to c = -32$

Imponendo la condizione $a + b = \mathbf{\frac{2+c}{2}}$ si ottiene $6 + b = -15 \to b = -21$

$$f(x) = \begin{cases} 6e^{2-x} - 21 & x < 2 \\ \frac{x-32}{x} & x \geq 2 \end{cases}$$



I due rami si congiungono nel punto comune $A(2, f(2)) \rightarrow A(2, -15)$

La tangente sinistra è assegnata e, come si può verificare , passa per il punto A

La tangente destra ha equazione $y + 15 = 8(x - 2) \rightarrow y = 8x - 31$