* Correzioni proposte dal collega Angelo Spina, che ringraziamo per le segnalazioni:

① Nel punto © per il calcolo della derivata seconda di $h(x)$, il prof. Spina riporta quanto segue:

$$h''(x) = \frac{2(2t^3 - 6t - 9)}{t^3}$$

Con $t = 2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$

$h''(x) = 0 \iff 2t^3 - 6t - 9 = 0$ che ha come unica soluzione reale un numero t^* che appartiene all'intervallo $(2;3)$.

$t^* \approx 2{,}238386274$, invece il valore esatto è

$$t^* = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{65}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{65}}{4}}$$

Inoltre

$2t^3 - 6t - 9 > 0 \quad \forall\, t > t^*$

$2t^3 - 6t - 9 < 0 \quad \forall\, t < t^*$

Quindi

$h''(x) > 0 \quad \forall\, t > t^*$ e $\forall\, t < 0$

$h''(x) < 0 \quad \forall\, 0 < t < t^*$ $\quad h'' = 0$ per $t = t^*$

Le ascisse per le quali $h''(x)=0$ si ottengono da: $2x^2+x-1=t^*$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9+8t^*}}{4} \approx -1,546801252$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{9+8t^*}}{4} \approx 1,046801252$$

Le ascisse per cui $h''(x)>0$ si ottengono per:

$2x^2+x-1>t^* \quad \vee \quad 2x^2+x-1<0$

le cui soluzioni sono

$$x<x_1 \quad \vee \quad -1<x<\frac{1}{2} \quad \vee \quad x>x_2$$

Le ascisse per cui $h''(x)<0$ si ottengono da:

$$\begin{cases} 2x^2+x-1>0 \\ 2x^2+x-1<t^* \end{cases}$$ le cui soluzioni sono

$$x_1<x<-1 \quad \vee \quad \frac{1}{2}<x<x_2$$

$h(x)$ è convessa per $x<x_1 \vee -1<x<\frac{1}{2} \vee x>x_2$

$h(x)$ è concava per $x_1 < x < -1 \vee \frac{1}{2} < x < x_2$

Le ascisse dei punti di flesso sono:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9+8t^*}}{4} \approx -1,546801252$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9+8t^*}}{4} \approx 1,046801252$$

con t^* unica soluzione di $2t^3 - 6t - 9 = 0$

$t^* \in (2;3) \Rightarrow t^* \approx 2,238386974$.

~

Come visto, la ricerca dei flessi per $h(x)$ è particolarmente laboriosa, motivo per il quale la mostra proposta si basava su un'interpretazione grafica qualitativa ottenuta con calcolatrice grafica. Interpretazione che, purtroppo, ci ha condotto ad ascisse dei punti di flesso errate.

(2) Nel punto (d), è presente un errore di segno nel calcolo dell'area ottenuta. Infatti come segnala il prof. Spina:

$$A = \frac{8}{5} - \frac{2}{3}\ln 5$$

poiché:

$$A = \int_{-\frac{3}{4}}^{1/4} \left[\frac{8}{5} + \frac{1}{2x^2+x-1} \right] dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{1/4} \left[\frac{8}{5} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{3(2x-1)} \right] dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{1/4} \frac{8}{5}\,dx - \int_{-\frac{3}{4}}^{1/4} \frac{1}{3(x+1)}\,dx + \int_{-\frac{3}{4}}^{1/4} \frac{2}{3(2x-1)}\,dx =$$

$$= \left[\frac{8}{5}x \right]_{-\frac{3}{4}}^{1/4} - \frac{1}{3}\left[\ln|x+1| \right]_{-\frac{3}{4}}^{1/4} + \frac{1}{3}\left[\ln|2x-1| \right]_{-\frac{3}{4}}^{1/4} =$$

$$= \left[\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4} - \frac{8}{5}\left(-\frac{3}{4}\right) \right] - \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{1}{4}+1\right| - \ln\left|-\frac{3}{4}+1\right| \right] +$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\ln\left|2\cdot\frac{1}{4}-1\right| - \ln\left|2\left(-\frac{3}{4}\right)-1\right| \right] =$$

$$= \left[\frac{2}{5} + \frac{6}{5} \right] - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) +$$

$$- \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{1}{3}\ln\left[\frac{5}{4} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \right] = \frac{8}{5} - \frac{1}{3}\ln(25) =$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{2}{3}\ln(5)$$

∎.

Grazie ancora al collega Spina.

Claudia Mazzella
Monica Arbonesi
Rossella Cubeddu