Sotto le stelle a sette punte

dove cadono le diagonali svolgendo fili in figure

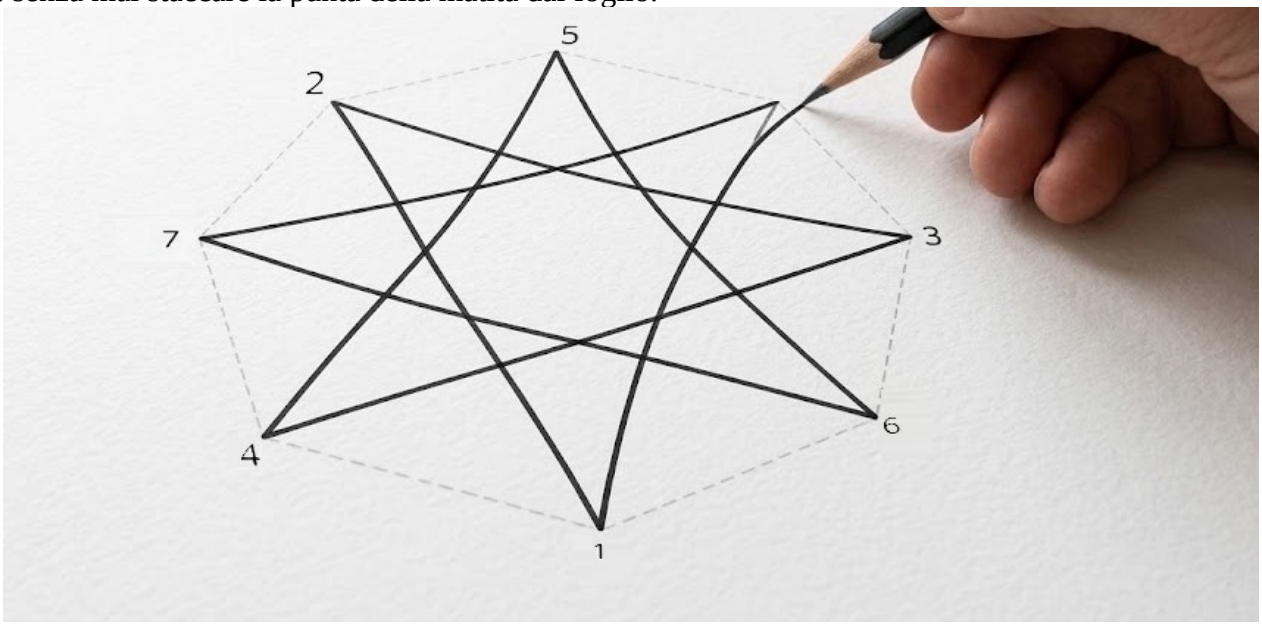
Studio delle misure algebriche dei segmenti prodotti dalle diagonali dei poligoni regolari

di Sergio Casiraghi

Introduzione

Nei giorni sotto Ferragosto è capitato di vedere le famose “stelle cadenti” del noto sciame delle Perseidi, frammenti di polvere della cometa Swift-Tuttle, le cui scie luminose restano ben visibili durante l’osservazione nel cielo notturno all'aperto. Con un foglietto in mano e una matita per ingannare l’attesa mi sono ritrovato a disegnare stelle, prima a 5 e poi a 7 e via via finanche 8 punte alla *Giotto*

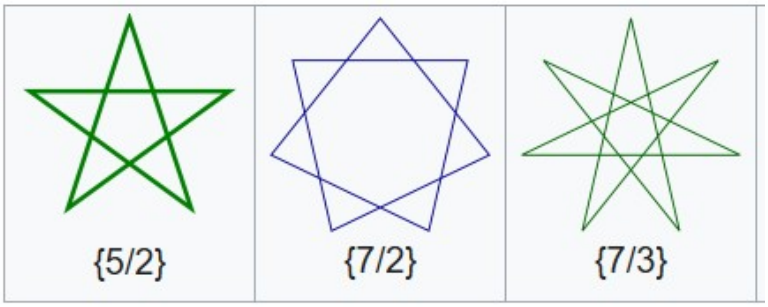
.. senza mai staccare la punta della matita dal foglio.



Soffermiamoci prima su sette: sette come le stelle del Grande Carro nell'Orsa Maggiore!

Eptagrammi

Come quegli astri guidano lo sguardo nella volta celeste, i sette vertici di un *ettagono regolare* disposti sul foglio ci faranno da guida. Ma mentre il cielo offre le costellazioni dalle forme fisse, la geometria regala una doppia magia.
Giocando con la matita, ci s'accorge infatti subito che esistono due "ritmi" diversi per chiudere il tracciato senza interruzioni, svelando non una (come le stelle a 5 punte), ma ben due stelle a sette punte. Se il nostro filo ideale collega i vertici saltandone uno alla volta (con passo 2), tesse l'*eptagramma* {7/2}, caratterizzato da punte più ampie. Se saltiamo due vertici alla volta (con un passo di 3), il tratto si avvolge in modo più serrato, compiendo così tre giri completi tutti attorno al centro per chiudersi nel più acuto e slanciato *eptagramma* {7/3}.



Indagare le trame di queste figure è ancora più affascinante se si considera l'indole ribelle dell'ettagono. A differenza del triangolo, del quadrato o del pentagono, l'*ettagono regolare non è costruibile con l'uso esclusivo di riga e compasso*. Il motivo è puramente algebrico: la determinazione dei suoi elementi geometrici porta inevitabilmente a un'equazione cubica (di terzo grado) irriducibile. Poiché gli strumenti classici della geometria euclidea — rette e circonferenze — traducono graficamente solo sistemi di equazioni di primo e secondo grado (o potenze di due), il salto al terzo grado rende la figura inafferrabile per via grafica tradizionale. Tutte figure geometriche piane non convesse ottenute congiungendo i vertici di un poligono regolare con un passo costante superiore a uno, formando un intreccio a forma di stella. Ciascun nome indica il numero di punte o lati del poligono originale. Nel caso dell'**ettagono regolare** l'approccio puramente deduttivo rivela la sua potenza: rinunciando al compasso e osservando i **quadrilateri ciclici** formati dai fili stellati che si incrociano, possiamo svelare quali segreti algebrici si nascondono affidandoci alla **Trigonometria** o all'eleganza del **Teorema di Tolomeo**.

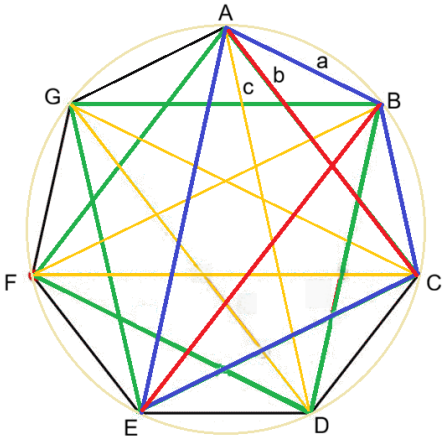
Misure dei segmenti delle diagonali dei poligoni regolari

Un affascinante campo d'indagine è lo studio dei segmenti prodotti dall'intersezione delle diagonali nei poligoni regolari che offre un ponte elegantissimo tra la geometria euclidea, la trigonometria e l'algebra dei polinomi. Da una parte l'approccio trigonometrico su un **poligono regolare** di n lati (n>2) inscritto in una circonferenza di raggio R, dove la lunghezza di una generica diagonale che sottende k lati si esprime in modo esatto con la formula: **d_k = 2R*sin(k*pi/n)**. Quando le diagonali s'incrociano all'interno del poligono, vanno a formare una rete di triangoli interni. Poiché tutti gli angoli alla circonferenza (e conseguentemente gli angoli di questi triangoli interni) sono multipli interi di pi/n, si può applicare in modo sistematico il **teorema dei seni**. Ciò permette di ricavare la misura algebrica di ciascun segmento in funzione del raggio e di costanti trigonometriche note.

Relazioni Algebriche e Polinomiali

Le misure di questi segmenti non generano numeri irrazionali casuali, ma grandezze strettamente legate alla costruibilità del poligono stesso.
Nel **pentagono**, l'incrocio di due diagonali divide ciascuna di esse in due segmenti il cui rapporto corrisponde esattamente alla sezione aurea φ. Nell'**ettagono**, l'analisi diventa molto più stimolante, ma occorre prestare rigorosa attenzione a distinguere le diagonali che racchiudono 2 lati (corte) da quelle che ne sottendono 3 (lunghe), e studiando i loro punti di intersezione, si scopre che i segmenti generati dipendono dalle radici di equazioni cubiche. Questo è dovuto al fatto che grandezze come cos(2*pi/7) sono radici di polinomi di terzo grado a coefficienti interi. Nei **poligoni superiori**, con numero di lati maggiore di 7, lo studio si traduce spesso nell'analisi delle radici dell'unità nel piano complesso tramite l'uso di **polinomi ciclotomici** per cui i segmenti si rivelano essere espressioni simmetriche o somme specifiche di tali radici. È terreno fertilissimo per costruire eleganti dimostrazioni.

L'**ettagono regolare** è un poligono straordinario per questi studi. Poiché non è costruibile con riga e compasso, la geometria delle sue intersezioni porta direttamente alle equazioni cubiche. Per impostarne lo studio, partiamo dagli elementi base. In un ettagono regolare di lato a, le diagonali si dividono in due famiglie distinte: la diagonale minore, che indichiamo con b e che racchiude 2 lati, e la diagonale maggiore, che indichiamo con c e che ne racchiude 3. Le relazioni algebriche tra questi segmenti sono governate dalla trigonometria degli angoli multipli di pi/7. Una delle identità più eleganti e fondamentali, è nota anche come **"equazione ottica" dell'ettagono** (data la somiglianza visiva con la legge dei punti coniugati delle lenti in ottica) che lega indissolubilmente le tre grandezze: 1/a = 1/b + 1/c, la cui dimostrazione si affida alla potenza del **Teorema di Tolomeo**.



Si individua un *quadrilatero ciclico* scegliendo opportunamente quattro vertici dell'ettagono: A, B, C, E. Applichiamo il Teorema di Tolomeo a tale quadrilatero inscritto, il quale stabilisce che il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti: b*c = a*b + a*c.
Trattandosi di lunghezze non nulle, possiamo dividere entrambi i membri dell'espressione per il prodotto dei tre segmenti, ovvero a*b*c e si ha bc/abc = ab/abc + ac/abc. Semplificando le frazioni, emerge l'identità: 1/a = 1/c + 1/b.
L'equazione ottica dell'ettagono si può ricavare anche con la trigonometria e le formule di prostaferesi. Questa dimostrazione è un buon esempio di come le proprietà geometriche si traducano perfettamente in eleganza algebrica o trigonometrica.

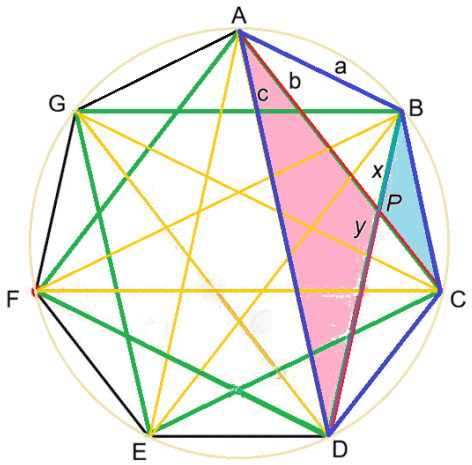
Quando queste diagonali corte o lunghe si intersecano all'interno della figura, i punti di incrocio creano segmenti le cui misure restano confinate nell'estensione algebrica generata dalle radici del polinomio caratteristico: x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0. Possiamo calcolare la misura di questi segmenti interni sfruttando i triangoli simili che si vengono a formare, i cui angoli saranno inevitabilmente combinazioni di pi/7, 2*pi/7 e 3*pi/7.

Sezioni delle diagonali dell'ettagono regolare

Cominciamo a "sezionare" per prime e trovarne le misure algebriche esatte in funzione del lato a, proprio il punto in cui si incontrano **due diagonali minori** che racchiudono 2 lati. Consideriamo un ettagono regolare ABCDEFG di lato a. Prendiamo due diagonali minori consecutive, ad esempio AC e BD, ciascuna di lunghezza b.

Queste due diagonali si intersecano in un punto che chiameremo P. L'intersezione divide ciascuna diagonale in due segmenti asimmetrici:

- Un segmento più corto verso il perimetro, che chiameremo x (corrispondente a PC o PB).
- Un segmento più lungo verso l'interno, che chiameremo y (corrispondente a AP o DP).



Chiaramente, la loro somma ci restituisce la diagonale intera: x + y = b.

Ricaviamo la loro misura esatta in funzione del lato a, sfruttando la similitudine dei triangoli e il Teorema di Tolomeo.

La similitudine dei triangoli interni

Se osserviamo i triangoli che si formano rispetto al punto di intersezione P, notiamo una simmetria basata sugli angoli alla circonferenza. In un ettagono regolare, ogni lato sottende un angolo alla circonferenza pari a pi/7.

- **Il triangolo "minore" BCP**: L'angolo PBC è generato dalla diagonale BD e dal lato BC, e sottende l'arco CD (un lato), quindi vale pi/7. Lo stesso vale per l'angolo PCB, che sottende l'arco AB. Il triangolo BCP è quindi isoscele con angoli alla base di pi/7, la base è il lato dell'ettagono a. I lati obliqui sono il nostro segmento x.
- **Il triangolo "maggiore" ADP**: Guardando dalla parte opposta di P, abbiamo la base AD, che è esattamente la diagonale maggiore c (quella che racchiude 3 lati). Gli angoli PAD e PDA sottendono rispettivamente gli archi CD e AB, misurando anch'essi pi/7. Anche questo triangolo è isoscele, con base c e lati obliqui pari al nostro segmento y.

Poiché i triangoli BCP e ADP hanno gli stessi angoli, sono simili (AAA). Il rapporto di similitudine tra il triangolo grande e quello piccolo è dato dal rapporto tra le loro basi: c/a.

Possiamo quindi legare x e y con una proporzione diretta: y/x = c/a e quindi y = x*c/a.

L'applicazione del Teorema di Tolomeo

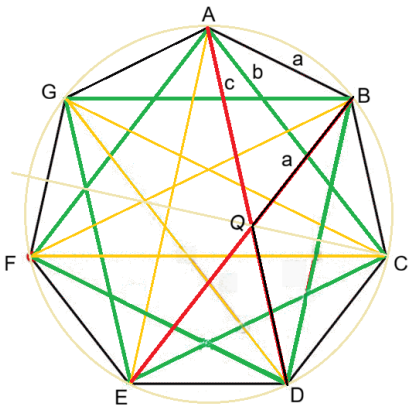
Sostituendo l'espressione di y nella equazione iniziale x + y = b, otteniamo x + x*c/a = b da cui **x*(a + c)/a = b**. Per eliminare il termine c riconducendo tutto a espressioni di a e b, applichiamo il **Teorema di Tolomeo** al quadrilatero ciclico ABCD, formato da tre lati dell'ettagono (a) e dalla diagonale maggiore (c), incrociati dalle due diagonali minori (b). Il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti: AC * BD = AB * CD + BC * AD e quindi abbiamo b * b = a * a + a * c, ovvero b^2 = a^2 + a*c. Raccogliendo la a alla destra, troviamo un'identità fondamentale per l'ettagono: a*(a + c) = b^2 ovvero a + c = b^2/a. Possiamo inserire questa identità nell'equazione del nostro segmento x: x * (b^2/a)/a = x*b^2/a^2 = b. Risolvendo in x, otteniamo la misura del segmento minore: **x = a^2 / b**. Per trovare il segmento maggiore y, basta sottrarre x dalla diagonale intera: y = b - a^2 / b = (b^2 – a^2)/b, ma ricordando che dal **Teorema di Tolomeo** si ha **b^2 - a^2 = a*c**, la formula si semplifica elegantemente in: **y = a*c/b**.

Per trovare la forma esplicita trigonometrica in funzione di a, consideriamo che la diagonale corta b è legata ad a dalla radice del polinomio cubico e può essere espressa esplicitamente solo per via trigonometrica come b = 2a*cos(pi/7). Sostituendo questo valore, otteniamo puramente in funzione del lato a: la misura del segmento minore x = a^2/(2a*cos(pi/7)) = a/(2*cos(pi/7)) e del segmento maggiore y=2a*cos(pi/7)-a/(2*cos(pi/7)) = a*(4*cos^2(pi/7)–1)/(2*cos(pi/7)).

Le **diagonali maggiori** (che racchiudono 3 lati indicate con c) offrono uno scenario geometrico ancora più ricco. Differentemente dalle diagonali minori, che intersecandosi creano un solo tipo di configurazione, quelle maggiori possono incrociarsi in un paio di modi geometricamente distinti nell'ettagono, a seconda dei vertici da cui partono.

Diagonali maggiori "consecutive" (es. AD e BE)

Prendiamo due diagonali maggiori che partono da vertici adiacenti, come AD e BE. Chiamiamo Q il loro punto di intersezione.



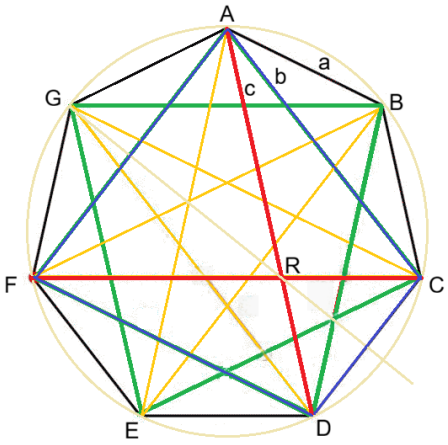
Andando ad analizzare i triangoli interni con la regola degli angoli alla circonferenza (dove ciascun lato sottende un angolo di pi/7), scopriamo una proprietà meravigliosa:

- Nel triangolo triangole ABQ, l'angolo QAB (ovvero DAB) sottende l'arco BCD (2 lati), quindi vale 2*pi/7. L'angolo angolo QBA (ovvero EBA) sottende l'arco EFGA (3 lati), quindi vale 3*pi/7.
- L'angolo rimanente angle AQB è quindi pari a pi - 2*pi/7 - 3*pi/7 = 2*pi/7.

Avere due angoli alla base di 2*pi/7 significa che il triangolo triangle ABQ è isoscele! Di conseguenza, il segmento BQ è esattamente uguale al lato dell'ettagono: BQ = a. Per simmetria, guardando il triangolo opposto triangle DEQ, troviamo che anche DQ = a. L'intersezione Q divide quindi ciascuna diagonale maggiore c nei seguenti due segmenti: a come segmento estremo e segmento interno c – a. Se esprimiamo il segmento interno sfruttando l'equazione ottica dell'ettagono (1/a = 1/b + 1/c, che equivale a bc = ac + ab), possiamo riscriverlo elegantemente come: c - a = a*c / b.

Diagonali maggiori "sfalsate" (es. AD e CF)

Ora prendiamo due diagonali maggiori i cui vertici di partenza sono separati da un altro vertice, come AD e CF. Chiamiamo R la loro intersezione. Concentriamoci sul triangolo CDR che si forma verso il perimetro, avente per base il lato CD = a:



- L'angolo RDC (angolo ADC) sottende l'arco ABC (2 lati) e vale 2*pi/7.
- L'angolo RCD (angle FCD) sottende l'arco FED (2 lati) e vale ancora 2*pi/7.

Ancora una volta abbiamo un triangolo isoscele, ma con angoli diversi. Per il *teorema della corda*, la lunghezza di una corda è proporzionale al seno dell'angolo alla circonferenza che vi insiste. Con il **Teorema dei Seni** applicato al triangolo CDR si ha che il rapporto tra i lati e il seno degli angoli opposti è costante, proporzionale alle lunghezze stesse di a, b, c. Otteniamo la misura dei segmenti corti uguali RD e RC: RD = a*b/c = ab/c. Per trovare il resto della diagonale AR, sottraiamo questa quantità da c: AR = c - ab/c = (c^2 – ab)/c. Se applichiamo il **Teorema di Tolomeo** al quadrilatero ACDF (che ha per lati b, a, b, b e per diagonali c, c), otteniamo l'identità c^2 = b^2 + ab. Sostituendo c^2 nella nostra formula, si semplifica il tutto in una forma puramente moltiplicativa per cui il segmento interno: AR = (b^2 + ab - ab)/c = b^2/c.

In sintesi, abbiamo visto che l'algebra dell'ettagono crea un ecosistema perfetto in cui le intersezioni delle diagonali maggiori restituiscono lunghezze proporzionali in modo aureo, generando i segmenti esatti {a, ac/b} nel primo caso e {ab/c, b^2/c} nel secondo.

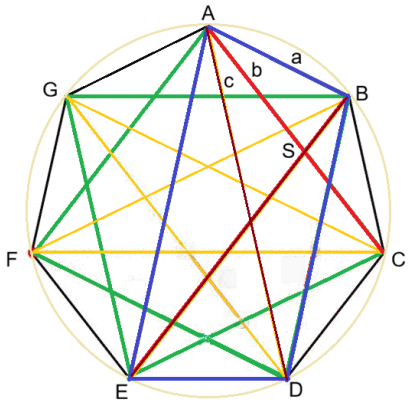
Sezionamenti ibridi

Passando ai casi di intersezione tra **diagonali corte e lunghe**, entriamo in quello che appare come il territorio più sorprendente dell'ettagono regolare. Se le diagonali maggiori avevano due modi geometricamente distinti di incrociarsi, ci si potrebbe aspettare che l'intersezione tra una diagonale corta (b) e una lunga (c) presenti diverse casistiche. Ed ecco la meraviglia: *non importa quali diagonali siano scelte, l'intersezione produrrà sempre e solo lo stesso identico insieme di segmenti*. Ci sono due modi apparentemente diversi in cui possono incrociarsi, ma sono uno l'esatta immagine speculare (*chirale*) dell'altro. Il risultato algebrico è identico e rivela un effetto "*matrioska*".

Una diagonale corta e una lunga

Consideriamo la diagonale corta AC (che unisce i vertici 1 e 3) e la diagonale lunga BE (che unisce i vertici 2 e 5). Sia S il loro punto di intersezione. Concentriamoci sul triangolo ABS che si forma. Sfruttando sempre gli angoli alla circonferenza (dove ogni lato sottende pi/7):

- L'angolo SAB (cioè CAB) sottende un solo lato (l'arco BC), quindi vale pi/7.
- L'angolo SBA (cioè EBA) sottende ben tre lati (l'arco EFGA), quindi vale 3pi/7.
- Segue che l'angolo nel vertice dell'intersezione sarà ASB = pi - pi/7 - 3 pi/7 = 3pi/7.



Il triangolo ABS ha due angoli identici, è isoscele!
Questo significa che il lato AS è esattamente uguale al lato dell'ettagono: AS = a. La diagonale corta b viene quindi divisa in modo nettissimo in un segmento esterno lungo a e un segmento interno lungo b – a. Se vogliamo esprimere questo resto in forma puramente moltiplicativa, ci viene in soccorso la famosa **equazione ottica** (bc = ac + ab, da cui ricaviamo c(b - a) = ab). E otteniamo così: b - a = ab/c.

Ora guardiamo cosa succede alla diagonale lunga BE nello stesso punto S. Applichiamo il **teorema dei seni** al triangolo isoscele ABS: BS/sin(pi/7) = a/sin(3pi/7). Ricordando che le lunghezze di a e c sono proporzionali a questi seni, è a = 2R*sin(pi/7) e c = 2R*sin(3pi/7), la proporzione diventa semplicemente: BS/a = a/c, BS = a^2/c. Questo è il segmento più corto della diagonale lunga. E il resto della diagonale? Per trovarlo, sottraiamo questa quantità da c: SE = c - a^2/c = (c^2 – a^2)/c.
Qui entra in gioco il **Teorema di Tolomeo** applicato al quadrilatero ABDE (che ha per lati a, b, a, c e per diagonali c, c). L'identità che ne deriva è c^2 = a^2 + bc, ovvero c^2 - a^2 = bc. Sostituendolo nella nostra equazione, porta al risultato: SE = bc/c = b.

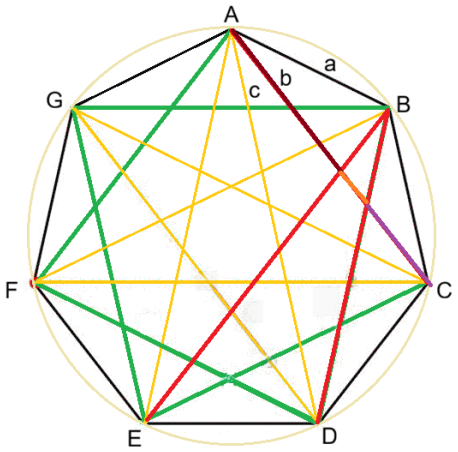
Dunque l'intersezione tra una diagonale corta e una lunga genera una cascata dimensionale in cui ogni segmento si annida nel successivo. I tagli prodotti vedono la diagonale corta b spezzata in {a, b-a} e la diagonale lunga c che si spezza in {b, c-b}. La diagonale lunga "contiene" esattamente la diagonale corta, e la diagonale corta "contiene" esattamente il lato. È un'architettura in cui le misure non si disperdono mai in irrazionalità caotiche, ma si ricombinano costantemente tra loro.

Due diagonali corte e una lunga

Se passiamo ai segmenti d'intersezione tra **due diagonali corte e una lunga** dell'**ettagono regolare** sveliamo una bellissima *ambiguità geometrica* legata a quali tre diagonali scegliamo di isolare nel nostro poligono. Infatti, ci sono due modi completamente diversi di combinare nel piano "due diagonali corte e una lunga", producendo frammentazioni opposte. Il bello dell'ettagono è che entrambe le visioni sono corrette, a seconda della configurazione che si va a pescare!

La diagonale corta divisa in tre

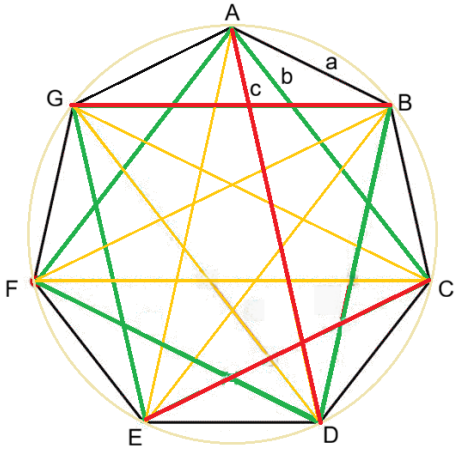
È la classica configurazione "a ventaglio". Si prende una diagonale corta (ad esempio AC, di lunghezza b) e la facciamo attraversare dal fascio di diagonali che partono dal vertice intermedio B, la andiamo a intersecare esattamente con un'altra diagonale corta (BD) e una lunga (BE).



In questo terzetto esatto (due corte, una lunga), è proprio la diagonale corta AC a venire trafitta due volte, dividendosi in tre segmenti!

L'intersezione con la lunga le stacca un segmento pari al lato a, mentre l'intersezione con l'altra corta le stacca dalla parte opposta un frammento pari ad a^2/b. Il risultato è che la diagonale corta si frammenta in questa terna: {a, a*(c-b)/b, a^2/b}.

La diagonale lunga divisa in tre



Una configurazione strutturale diversa vede la diagonale lunga centrale (ad esempio AD) incrociata dalle uniche due diagonali corte del poligono che riescono ad attraversarla (le diagonali BG e CE). In questo insieme specifico, le due diagonali corte non si incrociano mai tra loro, ma trafiggono entrambe la diagonale lunga come pioli di una scala. In questo diverso incastro di "due corte e una lunga", a frammentarsi in tre parti è la diagonale maggiore, generando la sequenza simmetrica longitudinale: {a^2/c, 2b-c, a^2/c}.

È la magia dell'algebra di questi poligoni dove basta spostare il punto di vista di un solo vertice e l'intera impalcatura di intersezioni si ribalta, mantenendo però un'armonia proporzionale assoluta.

L'**ettagono** è proprio un caleidoscopio di geometrie: basta cambiare prospettiva per scoprire incastri sempre nuovi e sorprendenti, confermando quanto l'intuizione visiva sia fondamentale per guidare il rigore algebrico. Potremmo proseguire su questa strada a stimare la lunghezza di altri segmenti sezionati, ma credo sia ormai chiaro come si può procedere, sapendo che in un **ettagono regolare**, il numero di punti di intersezione interni tra tutte le diagonali è esattamente 35.

Il ragionamento combinatorio per arrivarci è un classico molto elegante che vale la pena richiamare: per avere un punto di intersezione all'interno del poligono, abbiamo bisogno dell'incrocio di due diagonali. Queste due diagonali, a loro volta, fungono da diagonali di un quadrilatero convesso i cui vertici sono esattamente quattro dei vertici del nostro ettagono. Ogni scelta di 4 vertici dell'ettagono determina un unico quadrilatero convesso, di conseguenza, un unico punto di intersezione interno tra le sue due diagonali. Per arrivare al numero totale di intersezioni interne, è sufficiente calcolare in quanti modi possiamo scegliere 4 vertici tra i 7 disponibili, applicando la formula del coefficiente binomiale: binomial(7,4) = 7!/{4!*(7-4)!} = {7 * 6 * 5}{3 * 2 * 1} = 35.

C'è poi una bellissima proprietà geometrica capace di assicurare che questo calcolo sia esatto, senza bisogno di sottrarre nulla: *in un poligono regolare con un numero dispari di lati (come l'ettagono, dove n=7), è dimostrato che non accade mai che tre o più diagonali si intersechino in uno stesso punto interno*.

Ogni intersezione all'interno della figura è quindi generata esclusivamente dall'incrocio di una singola coppia di diagonali, rendendo il conto combinatorio di 35 punti perfetto e senza "doppioni".

Classificazione dei punti d’intersezione delle diagonali

Vista la distinzione fatto tra diagonali corte e lunghe possiamo distinguere quante intersezioni ci sono tra diagonali corte, lunghe e tra corte e lunghe. Questa classificazione che possiamo fare è un esercizio di geometria combinatoria interessante.
Le diagonali totali sono 14 (7 corte e 7 lunghe) e i punti di intersezione interni sono 35. Vediamo come si distribuiscono suddividendo il perimetro.
Per capire quante diagonali si incrociano, basta prendere una diagonale come riferimento e guardare quanti vertici dell'ettagono lascia alla sua destra e alla sua sinistra. Affinché un'altra diagonale la intersechi internamente, deve unire un vertice di un lato con un vertice dell'altro lato.

Intersezioni tra due diagonali corte (Corte – Corte)

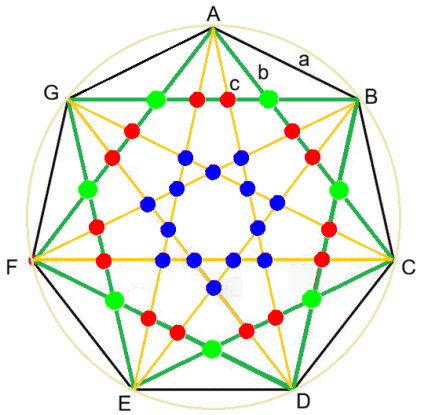
Prendiamo una diagonale corta. Questa "taglia" l'ettagono isolando un vertice da una parte e lasciandone 4 dall'altra. Ogni diagonale che la attraversa deve partire per forza da quell'unico vertice isolato. Da questo vertice partono in totale 4 diagonali verso gli altri vertici: due di queste sono corte e due sono lunghe. Quindi, ogni diagonale corta viene incrociata da esattamente altre 2 diagonali corte. Moltiplicando per le 7 diagonali corte, avremmo 14 incroci, ma poiché ogni incrocio coinvolge due diagonali dello stesso tipo (e lo stiamo contando due volte), dobbiamo dividere per 2. Totale intersezioni Corte-Corte: 7 * 2 / 2 = 7.

Intersezioni tra diagonali corte e lunghe (Corte – Lunghe)

Sfruttiamo il ragionamento già fatto. Abbiamo detto che dal singolo vertice isolato dalla diagonale corta partono anche 2 diagonali lunghe che la intersecano. Essendo insiemi diversi (non rischiamo di contare lo stesso incrocio due volte), basta moltiplicare il numero di diagonali corte (7) per le intersezioni con le lunghe su ciascuna (2). Totale intersezioni Corte-Lunghe: 7 * 2 = 14
(Verifica incrociata: se prendessimo una diagonale lunga, essa isola 2 vertici da una parte e 3 dall'altra. Le diagonali corte che la intersecano sono soltanto quelle che collegano i vertici immediatamente adiacenti ai suoi estremi, che sono esattamente 2. Anche qui, 7 * 2 = 14).

Intersezioni tra due diagonali lunghe (Lunghe – Lunghe)

Prendiamo ora una diagonale lunga. Questa divide il poligono lasciando 2 vertici da una parte e 3 vertici dall'altra. Il numero totale di diagonali che la intersecano è dato da tutte le possibili combinazioni che uniscono i vertici di un lato con quelli dell'altro: 2 * 3 = 6 intersezioni in totale su ogni singola diagonale lunga. Sappiamo già dal punto precedente che 2 di questi incroci avvengono con diagonali corte. Di conseguenza, i restanti 4 incroci (cioè 6 - 2) devono per forza avvenire con altre diagonali lunghe. Moltiplicando le 7 diagonali lunghe per 4 intersezioni ciascuna, otteniamo 28. Anche qui, incrociandosi tra simili, dividiamo per 2.
Totale intersezioni Lunghe-Lunghe: 7*4/2 =14.



Riepilogando

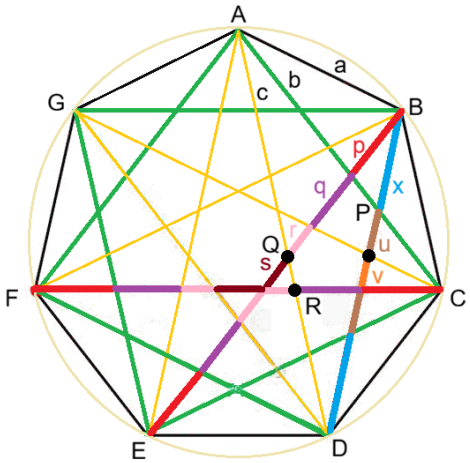
Corte con Corte sono 7, Corte con Lunghe sono 14, Lunghe con Lunghe sono 14. La somma restituisce perfettamente il totale 7 + 14 + 14 = 35. Tutto torna, confermando la perfetta architettura di queste intersezioni rappresentate dai punti in figura!

Contiamo i segmenti di lunghezza diversa

Noti tutti i punti d’intersezione, vediamo quanti segmenti sono generati su ciascuna tipologia sfruttando la simmetria (ogni diagonale ha segmenti speculari rispetto al proprio punto medio).

1. Una diagonale corta taglia l'ettagono isolando 1 vertice da una parte e lasciandone 4 dall'altra.
Le intersezioni sono 1 * 4 = 4 punti di incrocio. Segmenti generati: 4 punti dividono la diagonale in 5 segmenti.
Lunghezze distinte: Essendo disposti simmetricamente, le lunghezze uniche che si vengono a creare sono (5 + 1) / 2 = 3 lunghezze distinte.
2. Una diagonale lunga divide i vertici lasciandone 2 da una parte e 3 dall'altra.
Le intersezioni sono 2 * 3 = 6 punti di incrocio. Segmenti generati: 6 punti dividono la diagonale in 7 segmenti. Lunghezze distinte: Per lo stesso principio di simmetria speculare, le lunghezze uniche sono (7 + 1) / 2 = 4 lunghezze distinte.

Conclusione Strutturale



Sommando i risultati del conteggio (3 + 4), si ricava che l'intreccio delle diagonali nell'**ettagono regolare** genera, dal punto di vista puramente combinatorio e strutturale, esattamente **7 segmenti di lunghezza intrinsecamente diversa**. Queste sono le lunghezze rilevate nello studio che abbiamo eseguito calcolate in funzione del lato a e delle diagonali b e c, qui colorate come i 7 colori dell'arcobaleno!

Rivediamole insieme:
1. I segmenti sulla diagonale minore b
Una diagonale minore (ad esempio BD nella figura) viene intersecata da altre 4 diagonali (tutte quelle che partono dal vertice C accanto). Queste 4 intersezioni dividono la diagonale b in **5 segmenti**. Per la simmetria assiale della figura, i segmenti sono speculari rispetto al centro, generando **3 lunghezze distinte**, che corrispondono ai colori **azzurro (x)**, **marrone (u)** e **arancione (v)**.
Procedendo dagli estremi verso il centro della diagonale b, le misure esatte sono:

- *Segmento estremo x (Azzurro)*: Corrisponde alla distanza dal vertice alla prima intersezione **x = a^2/b**
- *Segmento intermedio u (Marrone)*: È la distanza tra la prima e la seconda intersezione. Calcolando la progressione delle intersezioni con il Teorema dei Seni e sottraendo x, si ottiene una forma altrettanto elegante: **u = a^3/(bc)**
- *Segmento centrale v (Arancione)*: È il cuore della diagonale minore. Sapendo che la somma simmetrica deve dare b (ovvero 2x + 2u + v = b), e applicando l'identità b - a = ab/c, il calcolo si semplifica in modo sorprendente, eliminando i denominatori: **v = 2a – b**. Ecco come procedere attraverso uno dei passaggi algebrici più belli e appaganti della geometria dell'ettagono partendo da v = b - (2x + 2u). Concentriamoci prima sulla somma 2x + 2u e sostituiamo i valori noti, quindi 2x + 2u = 2a^2/b + 2a^3/(bc) e raccogliamo a denominatore comune 2x + 2u = 2a(ac + 2a^2)/(bc). Tornando a ricordare che dal **Teorema di Tolomeo** sull'ettagono si ha **b^2 = a^2 + ac**, possiamo sostituire in blocco (ac + 2a^2) con b^2 e così abbiamo 2x + 2u = 2ab/c. A questo punto entra in gioco l'identità suggerita **b - a = ab/c** (derivata direttamente dalla manipolazione algebrica dell'equazione ottica 1/a = 1/b + 1/c che equivale a bc = ac + ab) andando a sostituire il termine ab/c con il binomio (b - a), otteniamo: 2x + 2u = 2(b - a) = 2b – 2a. A lavoro "sporco" è finito, non ci resta che inserire questo risultato meravigliosamente semplificato nella nostra espressione di partenza per avere v = b - (2x + 2u) = b - (2b - 2a) = b - 2b + 2a = 2a – b. Così la misura del segmento arancione, pura e priva di frazioni è **v = 2a – b**.

2. I segmenti sulla diagonale maggiore c
Una diagonale maggiore (ad esempio FC o EB) attraversa più in profondità il poligono e viene intersecata da ben 6 diagonali. Queste 6 intersezioni la frammentano in **7 segmenti**. Di nuovo, la simmetria speculare fa sì che la sequenza delle lunghezze si ripeta, generando **4 lunghezze distinte,** corrispondenti ai colori **rosso (p)**, **viola (q)**, **rosa (r)** e **bordeaux (s)** della figura.
Procedendo dai vertici estremi verso il centro della diagonale c, troviamo queste misure:

- *Segmento estremo p (Rosso)*: È il simmetrico speculare di x rispetto alla proporzione delle diagonali: **p = a^2/c**
- *Segmento intermedio q (Viola)*: **q = a(b-a)/c**
- *Segmento intermedio interno r (Rosa)*: **r = a(c-b)/c**
- *Segmento centrale s (Bordeaux)*: Questo è il segmento più intimo generato dall'incrocio delle diagonali. Anche qui, sapendo che 2p + 2q + 2r + s = c, la somma telescopica dei primi tre segmenti (p+q+r) restituisce incredibilmente il valore esatto del lato a. Di conseguenza, la misura del segmento centrale si ricava per pura sottrazione lineare: **s = c - 2a**.

Nessuna delle **7 espressioni (x, u, v, p, q, r, s) dei segmenti delle diagonali dell'ettagono** risulta algebricamente equivalente alle altre. I **sette colori** mappati sull'immagine rappresentano l'alfabeto completo delle lunghezze interne dell'ettagono regolare. È una di quelle soddisfazioni matematiche che rendono lo studio di queste figure così affascinante: vedere un groviglio di frazioni e incognite che si scioglie, passaggio dopo passaggio, in espressioni lineari così pulite ed essenziali.
Va detto che sviluppare e confrontare approcci diversi – come l'uso della trigonometria in ambito analitico o quello puramente geometrico – è sempre la parte più stimolante della risoluzione di tanti problemi.

Generalizzazione per i poligoni regolari con numero dispari di lati

Un'ultima, affascinante finestra si apre se cerchiamo di generalizzare quanto finora osservato. Come abbiamo dimostrato, nell'ettagono (n=7) l'intreccio completo delle diagonali genera esattamente sette segmenti di lunghezza intrinsecamente diversa. Ma cosa accade negli altri poligoni regolari?
Per i **poligoni con un numero dispari di lati** n, la configurazione geometrica delle intersezioni mantiene una regolarità strutturale che permette di determinare a priori il **numero totale U(n)** di questi segmenti generati. La formula generale, esprimibile tramite un elegante polinomio di terzo grado, in forma chiusa è la seguente:

$$U(n) = \sum_{x=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{x(n-2-x)+2}{2} = \frac{(n-3)(n^2-3n+14)}{24}$$

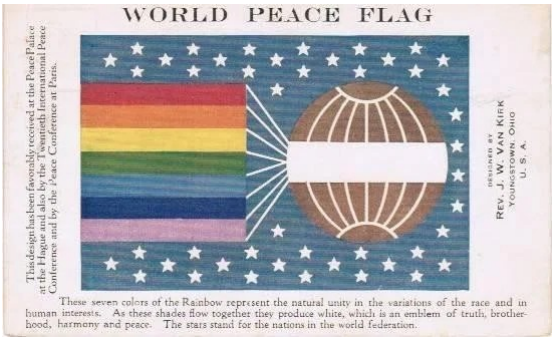
Applicando questa formula all'ettagono, otteniamo proprio il valore atteso, confermando in pieno il risultato della nostra indagine: U(7) = (7-3)*(49 - 21 + 14)/24 = 4 * 42/24 = 168/24 = 7.
L'equazione si rivela perfettamente coerente anche nei casi inferiori: per il pentagono (n=5) la formula restituisce U(5) = 2 (i due noti segmenti legati dalla proporzione aurea), mentre per il triangolo (n=3, intrinsecamente privo di diagonali) restituisce logicamente zero. Se calcoliamo i valori successivi per n dispari, generiamo la successione **0, 2, 7, 17, 34, 60, ..** Per i più curiosi e per gli amanti della **teoria dei numeri**, questa specifica successione è formalmente catalogata nella celebre enciclopedia online OEIS (*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*) al riferimento **A145066**, a riprova di come le proprietà di queste sezioni si innestino in un quadro algebrico profondo e ampiamente studiato.
È importante sottolineare che tale espressione è applicabile rigorosamente ai casi in cui il numero di lati è dispari. Nei **poligoni con un numero pari di lati**, infatti, le intersezioni multiple nello stesso punto e le simmetrie centrali rendono la mappa geometrica significativamente più complessa, facendo sì che il conteggio lineare delle lunghezze non sia così immediato e richieda un approccio combinatorio differente.
Tuttavia, nel mondo dei poligoni dispari, questa formula governa perfettamente la straordinaria varietà delle grandezze in gioco.

Riflessioni su possibili sviluppi didattici interdisciplinari

La mappatura completa, con le relative identità in funzione di a, b, c, è l'epilogo prezioso di quanto trattato sulle sezioni delle diagonali, perché dimostra non solo le misure, ma la profonda armonia combinatoria di questo poligono. Curiosamente evoca, concludendo, i **sette colori dell'arcobaleno** andando in ordine dall'esterno verso l'interno: **rosso, arancione, giallo, verde, blu, indaco e viola**. Tale sequenza fu stabilita da **Isaac Newton** associando i colori dello spettro visibile alle sette note musicali, quindi 7 è proprio un numero emblematico, magico, capace di accordare in un'unica meravigliosa sintesi lo perfezione rigorosa della Geometria, la Fisica della luce e l'Armonia universale delle note musicali.

Questo tema, presentato nell'ambito geometrico, ha risvolti multidisciplinari vicini e lontani che meritano di essere considerati e trattati ai vari livelli scolastici, e non solo nell'ambito ricreativo. Il citare le associazioni di colori dello spettro visibile, usati per far brillare e distintamente evidenziare segmenti in figura, è un rimando alle bandiere dalla Pace, al cui interno ci sono i colori arcobaleno, delle stelle e c'è un globo terrestre. La bandiera realizzata dal pastore metodista James William van Kirk nel 1913 fu la prima con la quale fece due tour mondiali predicando la fratellanza universale, può servire inalberarla anche oggi per l'**educazione alla Pace**!

Va favorito il dialogo con gli altri saperi per offrire agli studenti quella prospettiva capace di andare oltre il puro esercizio tecnico. Non si fa soltanto Geometria, Combinatoria, Algebra, Analisi, bensì anche Fisica, Astronomia, Arte, Religione, Filosofia e tanto altro.
Non è necessario aspettare il prossimo sciame di "stelle cadenti" per trovare riferimenti: basta solo alzare gli occhi al cielo, seguire tracce dei voli aerei e prenderli come (s)punti.



Riferimenti

https://it.wikipedia.org/wiki/109P/Swift-Tuttle
https://it.wikipedia.org/wiki/Orsa_Maggiore
https://it.wikipedia.org/wiki/Diagonale
https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Tolomeo
https://it.wikipedia.org/wiki/Notazione_di_Schl%C3%A4fli
https://it.wikipedia.org/wiki/Poligono_regolare
https://it.wikipedia.org/wiki/Polinomio_ciclotomico
https://it.wikipedia.org/wiki/Poligono_stellato
https://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_aurea
https://en.wikipedia.org/wiki/Dodecagram
https://it.wikipedia.org/wiki/Ettagono
https://it.wikipedia.org/wiki/Quadrilatero_ciclico
https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_della_corda
https://it.wikipedia.org/wiki/Pentagramma_(geometria)
https://it.wikipedia.org/wiki/Esagramma
https://it.wikipedia.org/wiki/Chiralit%C3%A0_(matematica)
https://oeis.org/A145066
https://www.pixartprinting.it/blog/colori-arcobaleno-storia-curiosita
https://nl.wikipedia.org/wiki/James_William_van_Kirk