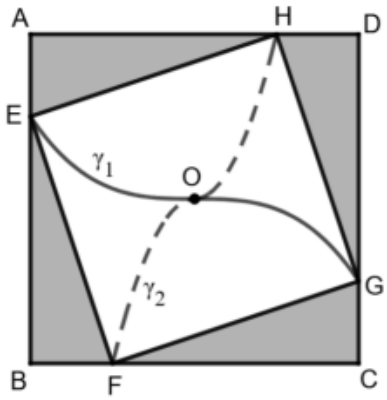
PROBLEMA 1

Ai maestri artigiani di Deruta è stata commissionata la realizzazione di un tavolo in ceramica da esterni, di forma quadrata, di lato 1 metro. Sulla superficie del tavolo, si chiede di raffigurare un quadrato con ciascun vertice posto a distanza d dagli spigoli e due linee che lo dovranno attraversare per delimitare le parti da destinare alla decorazione (come in figura). L'area della superficie ombreggiata equivale ai $\frac{3}{5}$ della rimanente.



a) Determinare la distanza d tra B e F.

Si consideri un sistema di riferimento con origine nel punto O, centro del tavolo, e i semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate passanti, rispettivamente, per il punto medio di CD e AD. La curva γ_1, che unisce due vertici opposti E, G del quadrato interno, è descritta da una funzione polinomiale di 3° grado ed ha un flesso a tangente orizzontale nel punto O.

Fissato $d = \frac{1}{4}$, ricavare l'espressione analitica $f_1(x)$ di γ_1, definita nell'intervallo $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. D'ora in avanti, si ponga $f_1(x) = -2x^3$.

b) Il maestro artigiano afferma: «Il lato EF è tangente a γ_1, nel punto E». Dimostrare che l'affermazione è falsa e determinare l'ampiezza dell'angolo che EF forma con la retta tangente.

c) La curva γ_2, che unisce i vertici opposti F, H del quadrato, è costituita dagli archi di due parabole, tra loro simmetriche rispetto al vertice O comune ad entrambe. Definire a tratti la funzione f_2, che descrive γ_2 nell'intervallo $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}]$.

Il maestro artigiano afferma: «Le curve γ_1 e γ_2 sono tangenti in O». Dimostrare che l'affermazione è vera.

Si assuma $f_2(x) = \begin{cases} -8x^2 & -\frac{1}{4} \le x \le 0 \\ 8x^2 & 0 < x \le \frac{1}{4} \end{cases}$

d) Calcolare l'area di ciascuna delle quattro superfici che γ_1 e γ_2 determinano sul quadrato interno $EFGH$.

Soluzione

a) Determinare la distanza d tra B e F.

L'area A_1 della parte ombreggiata è la somma delle aree dei 4 triangoli rettangoli, tra loro congruenti, i cui cateti hanno lunghezza uguale a d e $1-d$, rispettivamente .

$$A_1 = 2d(1-d)$$

Poiché $A_1 = \frac{3}{5}(S_{ABCD} - A_1) \rightarrow S_{ABCD} = \frac{8}{3} A_1$

Essendo unitaria l'area del quadrato $ABCD$, si impone

$$\frac{16}{3} d(1-d) = 1$$

$$16d^2 - 16d + 3 = 0 \rightarrow d = \frac{8 \mp \sqrt{16}}{16} = \frac{2 \mp 1}{4}$$

Le 2 soluzioni $d_1 = \frac{1}{4}$ $d_2 = \frac{3}{4}$ corrispondono alle lunghezze dei due segmenti in cui il punto F divide il lato BC.

Con riferimento alla figura riportata nel testo, ove appare $\overline{BF} < \overline{FC}$, accettiamo la soluzione $\boldsymbol{d = \frac{1}{4}}$

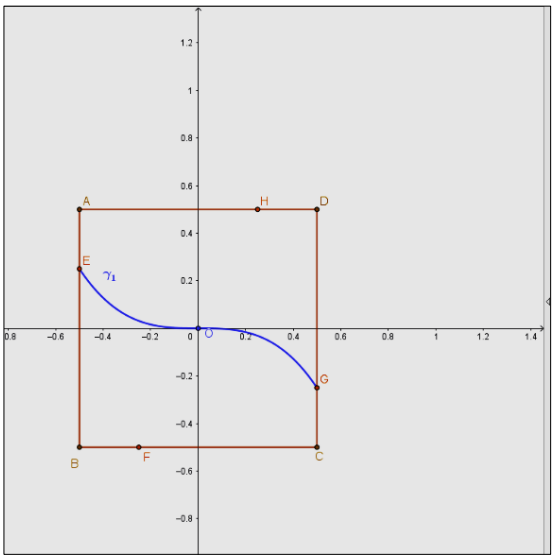
Si consideri un sistema di riferimento con origine nel punto O, centro del tavolo, e i semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate passanti, rispettivamente, per il punto medio di CD e AD. La curva γ_1, che unisce due vertici opposti E, G del quadrato interno, è descritta da una funzione polinomiale di 3° grado ed ha un flesso a tangente orizzontale nel punto O.

Le coordinate dei punti E e G sono

$E(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $G\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ *(punti simmetrici rispetto all'origine O)*

Una funzione polinomiale terzo grado ,

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,avente un flesso orizzontale nell'origine deve soddisfare le condizioni



$$\begin{cases} f(0) = & 0 \\ f'(0) = & 0 \\ f"(0) = & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = & 0 \\ c = & 0 \\ b = & 0 \end{cases}$$

La curva corrispondente ha equazione $y = ax^3$ ed è simmetrica rispetto al punto O. Poiché passaggio per il punto E implica il passaggio per G (e viceversa)

Imponiamo $\frac{1}{4} = -a\frac{1}{8} \rightarrow a = -2$. L'espressione analitica di γ_1,pertanto, è $\boldsymbol{f_1(x) = -2x^3 \quad con \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}}$

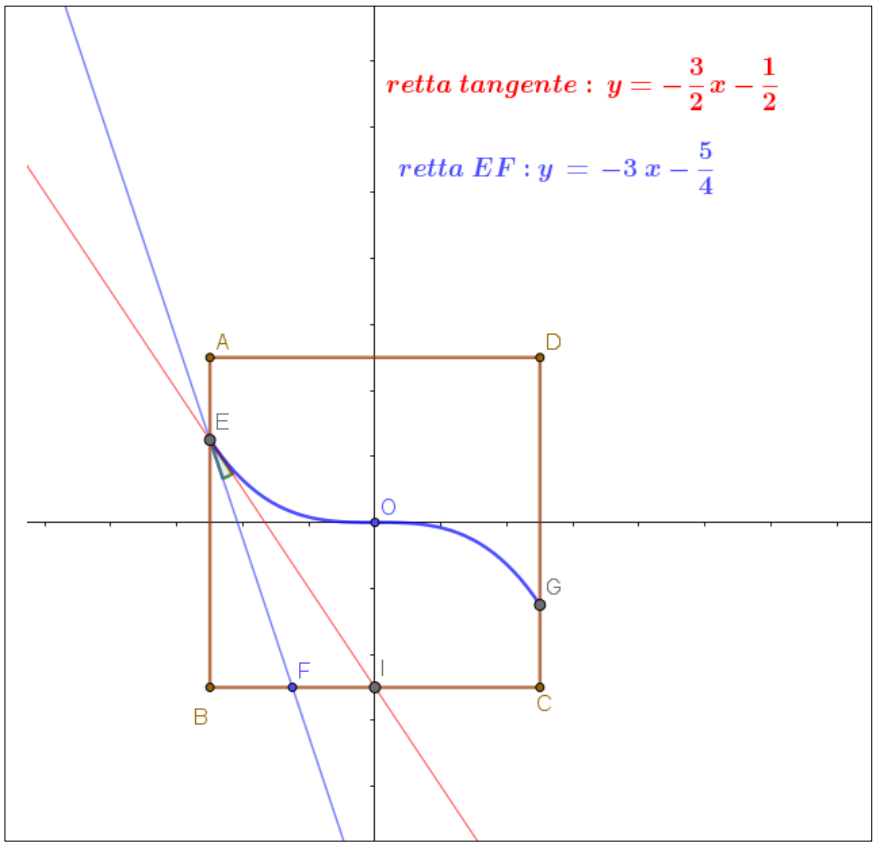
b) Il maestro artigiano afferma: «Il lato EF è tangente a γ_1, nel punto E». Dimostrare che l'affermazione è falsa e determinare l'ampiezza dell'angolo che EF forma con la retta tangente

Il coefficiente angolare della retta EF è uguale a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = -\frac{3}{4}4 = -3$

Il coefficiente angolare della retta tangente in E a γ_1 è uguale a

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}$$

L'affermazione del maestro artigiano è falsa



Nel triangolo rettangolo EBI, l'angolo $I\hat{E}F$ corrisponde alla differenza tra i due angoli $\alpha = I\hat{E}B$ e $\beta = F\hat{E}B$ con:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BI}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3} \qquad \tan\beta = \frac{\overline{BF}}{\overline{EB}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

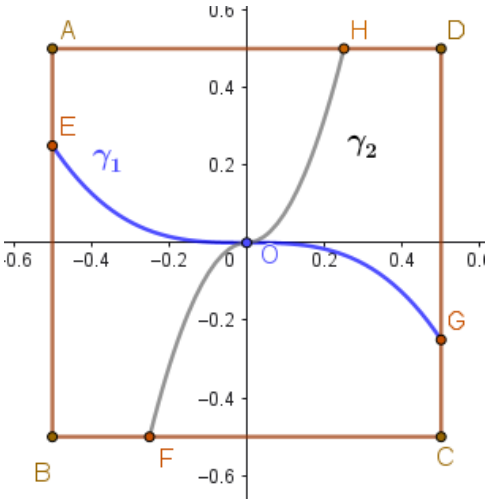
Applicando la formula di sottrazione $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ si ottiene

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{11} = \frac{3}{11}\ .$$

L'ampiezza dell'angolo $I\hat{E}F$, senza tener conto del suo orientamento nel piano cartesiano, è circa $15,255°$ ovvero $15°15'\ 18''$.

c) La curva γ_2, che unisce i vertici opposti F, H del quadrato, è costituita dagli archi di due parabole, tra loro simmetriche rispetto al vertice O comune ad entrambe. Definire a tratti la funzione f_2, che descrive γ_2 nell'intervallo $[-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}]$. Il maestro artigiano afferma: «Le γ_1 curve e γ_2 sono tangenti in O». Dimostrare che l'affermazione è vera.

La scelta della coppia di parabole di vertice O non è univoca, anche se, in seguito, è suggerita l'opzione più semplice di due parabole ad asse verticale (proprietà non specificata nel testo):



$$f_2(x) = \begin{cases} -8x^2 & -\frac{1}{4} \le x \le 0 \\ 8x^2 & 0 < x \le \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il risultato si ottiene facilmente imponendo ad una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ di avere il vertice nell'origine e di passare per $F\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{.2}\right)$ oppure per $H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, scegliendo poi gli opportuni intervalli di definizione.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = & 0 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a} = & 0 \\ -\frac{1}{2} = & \frac{a}{16} - \frac{b}{4} + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = & 0 \\ c = & 0 \\ a = & -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{b}{2a} = & 0 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a} = & 0 \\ \frac{1}{2} = & \frac{a}{16} + \frac{b}{4} + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = & 0 \\ c = & 0 \\ a = & 8 \end{cases}$$

La funzione definita a tratti è l'unione dei due rami di parabola tra loro simmetrici rispetto al punto O.

Essendo $\lim_{x\to 0^-} f_2\,(\mathrm{x}) = \lim_{x\to 0^+} f_2\,(\mathrm{x}) = 0$ la funzione $f_2\,(x)$ è continua in $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

La derivata è $f'_2\,(x) = \begin{cases} -16x & -\frac{1}{4} \le x \le 0 \\ 16x & 0 < x \le \frac{1}{4} \end{cases}$

Agli estremi dell'intervallo di definizione è derivabile solo a destra o solo a sinistra, rispettivamente.

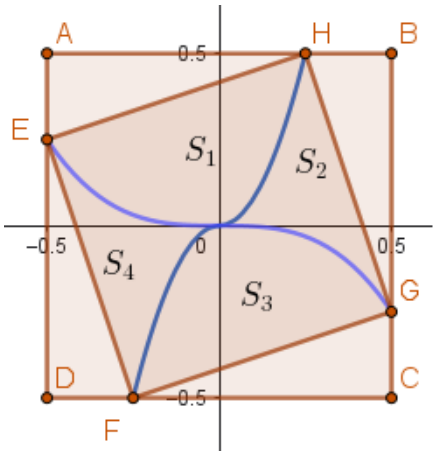
La funzione è derivabile in O poichè $\lim_{x\to 0^-} f'_2\,(\mathrm{x}) = \lim_{x\to 0^+} f'_2\,(\mathrm{x}) = 0$

Le $curve\ \gamma_1$ e γ_2 sono entrambe tangenti in O all'asse delle ascisse e sono, pertanto, tra loro tangenti nel punto stesso.

Osservazione :Nel precedente procedimento, imponendo che l'asse sia verticale e che il vertice sia l'origine ,si impone implicitamente che la tangente nel punto O coincida e con l'asse delle x, cioè con la tangente in O a γ_1. La verifica della condizione di tangenza tra le due curve ha , pertanto, solo un **carattere di contingenza.**

Anche se, probabilmente , i metodi da adottare esulano dagli ordinari percorsi scolastici degli studenti liceali, in seguito affronteremo la richiesta da un punto di vista più generale .

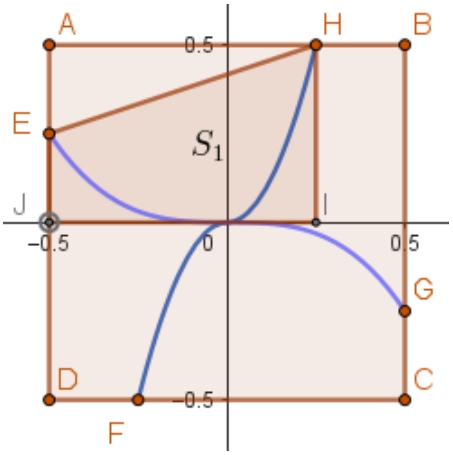
d) Calcolare l'area di ciascuna delle quattro superfici che γ_1 e γ_2 determinano sul quadrato interno $EFGH$.



Le due curve dividono il quadrato $EFGH$ in 4 regioni a due a due congruenti, grazie alla simmetria rispetto all'origine, sia del quadrato, sia delle curve coinvolte ,

È sufficiente , pertanto, calcolare una sola delle aree, ad esempio $\boldsymbol{S_1 = S_3}$, e l'area **Q** del quadrato, in quanto $\boldsymbol{S_2 = S_4 = \frac{Q-2S_1}{2}}$.

L'area $\boldsymbol{S_1}$ è uguale alla differenza tra l'area del trapezio rettangolo $EHIJ$ e le aree sottese dagli archi EO e OH. rispettivamente



L'area del trapezio $EHIJ$= $\frac{(\overline{EJ}+\overline{HI})}{2}\cdot\overline{JI}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{9}{32}}$

$$S_1=\frac{9}{32}-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}-2x^3dx-\int_{0}^{\frac{1}{4}}8x^2dx$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}-2x^3dx=2\int_{0}^{-\frac{1}{2}}x^3dx=2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{16}=\mathbf{\frac{1}{32}}$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{4}}8x^2dx=\left[\frac{8}{3}x^3\right]_{0}^{\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{64}=\mathbf{\frac{1}{24}}$$

$$\boldsymbol{S_1=S_3}=\frac{9}{32}-\frac{1}{32}-\frac{1}{24}=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}=\mathbf{\frac{5}{24}}$$

Area del quadrato $\boldsymbol{EFGH}=\overline{EH}^2=\overline{AE}^2+\overline{AH}^2=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\mathbf{\frac{5}{8}}$

$$\boldsymbol{S_2=S_4}=\frac{Q-2S_1}{2}=\frac{\frac{5}{8}-\frac{5}{12}}{2}=\mathbf{\frac{5}{48}}$$

APPROFONDIMENTO RELATIVO AL PUNTO c.

Possiamo osservare innanzi tutto che ,riguardo alla curva γ_2, si parla di archi di parabole e non di funzioni polinomiali, suggerendo un approccio di tipo geometrico.

Una generica conica di equazione

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dipende da 6 parametri definiti a meno di un fattore di proporzionalità, ovvero da 5 parametri indipendenti.

La prima condizione da imporre è che la conica sia una parabola : $B^2 - 4AC = 0$.

Per determinarne l' equazione servono altre 4 condizioni indipendenti**,** mentre nel testo sono assegnate solo 3 condizioni: passaggio per O, che è anche vertice, e passaggio per il punto H (oppure per il punto F).

Il problema è indeterminato ed è necessaria una quarta condizione che potrebbe essere la direzione dell'asse. In tal caso la parabola si determina facilmente con il metodo dei fasci

- Se l'asse ha equazione $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = 0$ (con a e b non entrambi nulli), l'equazione della tangente nel vertice O, perpendicolare all'asse, assume la forma $\mathrm{bx} - \mathrm{ay} = 0$
- La parabola richiesta appartiene al fascio di equazione $(\mathrm{ax} + \mathrm{by})^2 + \mathrm{k}(\mathrm{bx} - \mathrm{ay})=0$ dove il parametro k può essere determinato imponendo il passaggio per l'ulteriore punto assegnato.

Se si sceglie $\boldsymbol{b = 0}$ (asse verticale e tangente orizzontale) si ricade nel caso precedente : $ax^2 - ky = 0$

Imponendo il passaggio per $H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ *si* ottiene $k = \frac{a}{8} \rightarrow y = 8x^2$

Imponendo il passaggio per $F\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ *si* ottiene $k = -\frac{a}{8} \rightarrow y = -8x^2$

$$f_2(x) = \begin{cases} -8x^2 & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 8x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

- **Se si sceglie, ad esempio, $\boldsymbol{a = 3, b = 1}$** , si ottiene il fascio di parabole

$(3x + y)^2 + k(x - 3y) = 0$.

Imponendo il passaggio per il punto $H\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$si determina il valore del parametro

k : $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^2+k\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{16}-\frac{5}{4}$ $\mathrm{k}=0\rightarrow \boldsymbol{k=\frac{5}{4}}$

La parabola corrispondente ha equazione

$$(3x+y)^2+\frac{5}{4}(x-3y)= \ 9x^2+6xy+y^2+\frac{5}{4}x-\frac{15}{4}y=0$$

$$\boldsymbol{4y^2+(24x-15)y+36x^2+5x=0}$$

costituita dai due rami

$y=\frac{15-24x\pm\sqrt{(24x-15)^2-16(36x^2+5x)}}{8}=\boldsymbol{\frac{15-24x\pm\sqrt{225-800x}}{8}}$

Il ramo che contiene il punto H è $\quad y=\boldsymbol{\frac{15-24x-\sqrt{225-800x}}{8}}$

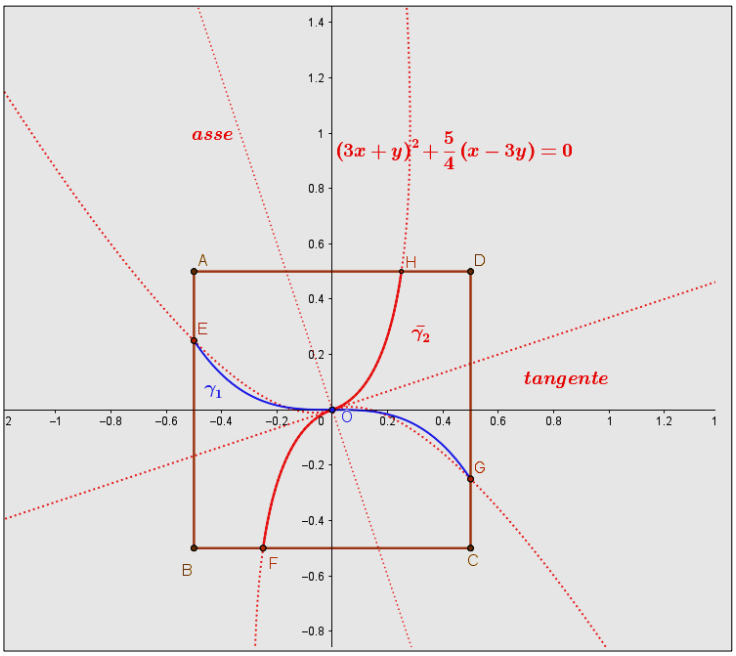
In una simmetria rispetto all'origine si trasforma in $y=\boldsymbol{\frac{-15-24x+\sqrt{225+800x}}{8}}$

Funzione definita a tratti

$$\bar{f}_2(x)=\begin{cases}\boldsymbol{\frac{-15-24x+\sqrt{225+800x}}{8}} & \boldsymbol{-\frac{1}{4}\le x\le 0}\\ \boldsymbol{\frac{15-24x-\sqrt{225-800x}}{8}} & \boldsymbol{0<x\le\frac{1}{4}}\end{cases}$$

I due archi di parabola hanno in comune il vertice O.

Le semirette tangenti in O, rispettivamente sinistra e destra , appartengono alla stessa retta

$x-3y=0$

La curva $\overline{\gamma_2}$ risponde ai requisiti del testo ma non ha, nel punto O, la stessa tangente di γ_1.