Riflessione sulle equazioni di Pell

di Antonino Giambò

1. Nei precedenti articoli sull'antica matematica indiana ho accennato alla cosiddetta "equazione di Pell". In questo contributo mi propongo di approfondire l'argomento.

In realtà, di equazioni di Pell non ce n'è soltanto una.

Sono denominate infatti *equazioni di Pell* le seguenti equazioni diofantee di 2° grado:

(1) $$a\,x^2 + 1 = y^2,$$

(2) $$a\,x^2 - 1 = y^2,$$

dove a è un numero intero positivo.

Il problema che intendo affrontare consiste nella ricerca di soluzioni intere positive delle due equazioni.

Ovviamente, se (p, q) è una soluzione positiva di una delle due equazioni, per ragioni di simmetria lo sono anche le coppie (p, -q), (-p, q), (-p, -q), di cui almeno una componente è negativa. E, viceversa, se una delle tre coppie precedenti è soluzione dell'equazione, lo sono anche la coppia (p, q) e le altre due coppie.

È comunque sulle soluzioni positive che porremo la nostra attenzione.

2. Incomincio segnalando le due equazioni che si possono ritenere le prime equazioni di Pell della storia.

- La prima equazione di Pell del tipo (1), di cui si ha conoscenza, è la seguente:

$$4.729.494\,x^2 + 1 = y^2.$$

Per la verità, del problema che riconduce ad essa s'era persa traccia, anche se in realtà se ne parlava, e se ne è avuta conoscenza solo nel 1773, quando il problema fu rinvenuto da un filologo tedesco.

Il problema era stato posto, ma non risolto, da Archimede (287-212 a.C.), ed è noto come *problema dei buoi* (o *problema del bestiame*). Risale quindi a 22 secoli fa.

Chi volesse saperne di più sull'enunciato del problema e capire in particolare come si sia giunti all'equazione suddetta può riferirsi ad un articolo di Emilio Ambrisi, intitolato proprio *Il problema dei buoi di Archimede*, pubblicato su Matmedia il 20 settembre 2021 oppure leggere quanto scrive Silvio Maracchia sull'argomento [1].

Qui mi limito a dire che la risoluzione dell'equazione è complicata e la sua soluzione esatta è stata trovata per la prima volta solo nel giugno 1965, ma con l'aiuto determinante di un computer.

Riporto questa soluzione:

$x = 50.549.485.234.315.033.074.477.819.735.540.408.986.340$

$y = 109.931.986.732.829.734.979.866.232.821.433.543.901.088.049$

- La seconda equazione di Pell del tipo (1), in ordine cronologico, traduce il seguente problema:

Qual è il quadrato che moltiplicato per 8 diventa - insieme all'unità - un quadrato?

Fu proposto dal matematico indiano Bhaskara I (VII sec. d.C.) nove secoli dopo Archimede.

Il problema, indicati con x, y rispettivamente i due numeri cercati, si traduce nella seguente equazione:

$$8\,x^2 + 1 = y^2.$$

Bhaskara ne trovò due soluzioni intere: $(x_1=1,\ y_1=3)$, $(x_2=6,\ y_2=17)$.

Non c'è dato sapere come le abbia trovate, ma è verosimile che per tentativi, peraltro facili, abbia trovato i valori di x, mentre per i corrispondenti valori di y si sia servito di qualcosa di sanalogo alla nostra formula $y=\sqrt{8\,x^2+1}$.

Ricordo che Bhaskara non disponeva di alcun simbolismo.

---

[1] Silvio Maracchia, *Storia dell'algebra*, Napoli, Liguori Editore, 2005, pag.114 e seguenti.

3. Un altro matematico indiano, Brahmagupta, il più importante di quell'epoca, contemporaneo di Bhaskara I, fece un'ampia trattazione dell'equazione (1), inventando un metodo per trovare soluzioni particolari dell'equazione stessa, dopo averne trovata una con tentativi mirati.

Descriviamo questo metodo, ma utilizzando il nostro linguaggio simbolico; linguaggio che Brahmagupta non possedeva e doveva servirsi pertanto del linguaggio naturale.

Egli associa all'equazione (1) la seguente *equazione ausiliaria*:

$$a\,p^2 + k = q^2.$$

Assume per p un determinato valore e assegna a k un valore tale per cui si ottenga un quadrato perfetto q^2.

Conclude, con un adeguato ragionamento, che risulta soluzione della (1) la coppia (x, y) tale che:

$$x = \frac{2\,p\,q}{k}\,, \quad y = \frac{a\,p^2 + q^2}{k}\,.$$

Non è però assicurato che il valore così trovato per x sia un valore intero. In tal caso, se cioè x non è intero, si può procedere provando con altri valori di p o di k.

Si dimostra che, se $\frac{2\,p\,q}{k}$ è un intero, anche $\frac{a\,p^2+q^2}{k}$ lo è. La dimostrazione non è semplicissima. La propongo ugualmente nel secondo dei riquadri sottostanti, a beneficio di quegli studenti che sono interessati a questioni di matematica.

Che la coppia suddetta sia soluzione della (1) possiamo dimostrarlo facilmente con i nostri mezzi.

Precisamente, dall'equazione $ap^2+k=q^2$ segue $k=q^2-ap^2$ e quindi: $k^2=q^4-2ap^2q^2+a^2p^4$; da qui, dopo aver portato $2ap^2q^2$ al primo membro e dopo aver sommato $2ap^2q^2$ ad entrambi i membri, si ottiene: $4ap^2q^2+k^2=a^2p^4+q^4+2ap^2q^2$; pertanto, dividendo tutto per k^2, si ha:

$$a\frac{4\,p^2q^2}{k^2} + 1 = \frac{(a\,p^2 + q^2)^2}{k^2} \quad \text{ossia:} \quad a\left(\frac{2\,p\,q}{k}\right)^2 + 1 = \left(\frac{a\,p^2 + q^2}{k}\right)^2.$$

Dal che si desume ciò che ci eravamo proposti di dimostrare, che cioè la coppia suddetta è una soluzione dell'equazione (1).

Si tratta solo di valutare se il rapporto $2pq/k$ è un intero o se non lo è.

Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA.

Se i numeri p, q, k, a sono interi e se $ap^2+k=q^2$ e inoltre $\frac{2\,p\,q}{k}$ è un intero allora anche $\frac{a\,p^2+q^2}{k}$ è un numero intero.

È necessaria la seguente premessa: se il trinomio monico x^2+rx+s, a coefficienti interi, ammette zeri razionali, questi non possono che essere numeri interi.

La cosa si spiega facilmente. Se infatti il trinomio ammette zeri razionali, questi sono necessariamente divisori del numero intero s e pertanto sono essi stessi numeri interi.

Possiamo andare adesso alla dimostrazione del teorema.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo $ap^2+k=q^2$, si ha: $ap^2=q^2-k$ e pertanto:

$$\frac{a\,p^2 + q^2}{k} = \frac{(q^2 - k) + q^2}{k} = \frac{2\,q^2}{k} - 1\,.$$

Si desume che $\frac{a\,p^2+q^2}{k}$ è un numero intero se lo è $\frac{2\,q^2}{k}$.

Ora, sappiamo per ipotesi che $\frac{2\,p\,q}{k}$ è un numero intero: indichiamolo con m.

Risulta pertanto: $2pq=mk$ e, di conseguenza: $4p^2q^2=m^2k^2$, e anche: $4ap^2q^2=am^2k^2$. Da qui segue:

$$4\,q^2(ap^2) - a\,m^2k^2 = 0 \quad \text{ed anche} \quad 4\,q^2\,(q^2 - k) - a\,m^2k^2 = 0 \quad \text{ossia:} \quad 4\,q^4 - 4\,q^2k - a\,m^2k^2 = 0\,.$$

Dividendo entrambi i membri dell'ultima equazione per k^2 e scrivendo la nuova equazione in modo conveniente, si trova:

$$\left(\frac{2\,q^2}{k}\right)^2 - 2\cdot\frac{2\,q^2}{k} - am^2 = 0\,.$$

Questo significa che il numero razionale $\frac{2\,q^2}{k}$ è uno zero del trinomio monico x^2-2x-am^2, a coefficienti interi. Esso, in base alla premessa fatta, deve essere pertanto un numero intero.

Di conseguenza anche il numero $\frac{a\,p^2+q^2}{k}$ è un numero intero.

Come volevasi dimostrare.

Facciamo un esempio, ragionando sull'equazione

(3) $$10\,x^2+1=y^2.$$

Associamo ad essa l'equazione ausiliaria $10\,p^2+k=q^2$.

Prendiamo $p=1$, per cui da questa equazione si desume $q^2=10+k$. Affinché si ottenga un quadrato perfetto q^2 poniamo $k=6$; si ha di conseguenza: $q^2=16$ e dunque $q=4$. Si ottiene pertanto il seguente valore di x:

$$x = \frac{2\,p\,q}{k} = \frac{2\cdot 1\cdot 4}{6} = \frac{3}{2}\,.$$

Non è un intero. Non va bene.

Neanche prendendo $p=2$ e ripetendo lo stesso ragionamento, si ottiene un intero per x.

Proviamo per $p=3$, per cui si ha $q^2=90+k$. Basta scegliere $k=10$ per ottenere il quadrato perfetto $q^2=100$ e quindi $q=10$. Dunque:

$$x = \frac{2\,p\,q}{k} = \frac{2\cdot 3\cdot 10}{10} = 6\,.$$

(Faccio notare che si giunge allo stesso risultato prendendo $p=1$ e $k=-1$, nel qual caso sarebbe $x=-6$, ma, per quanto spiegato prima, anche $x=6$ è accettabile).

Adesso il valore trovato per x va bene. Di conseguenza, in base alla seconda formula di Brahmagupta:

$$y = \frac{a\,p^2+q^2}{k} = \frac{10\cdot 9+100}{10} = 19\,.$$

In alternativa, se occorre, tenendo presente l'equazione in esame:

$$y = \sqrt{10\cdot x^2+1} = \sqrt{10\cdot 6^2+1} = \sqrt{361} = 19\,.$$

Si ottiene così una prima soluzione $(x_1=6, y_1=19)$ dell'equazione (3).

Una volta trovata una soluzione dell'equazione (1), Brahmagupta ha bisogno di trovare una soluzione di una seconda equazione del tipo (1), per poter applicare una regola, di sua invenzione, che gli permette poi di trovare una soluzione di una terza equazione, sempre del tipo (1).

Il suo metodo fu in seguito perfezionato e la determinazione di soluzioni dell'equazione (1), dopo averne trovata una, non richiede altro. Basta utilizzare, infatti, la seguente formula ricorsiva per il calcolo di x_n, con $n\geq 2$:

$$x_n = x_1 y_{n-1} + y_1 x_{n-1}$$

e da qui, noto x_n e tenendo presente la (3), si ricava:

$$y_n = \sqrt{a\,x_n{}^2+1}\,.$$

Sembra, tuttavia, che anche Brahmagupta avesse presente che poteva utilizzare la precedente formula per trovare il valore di x_2. Ossia: $x_2=x_1y_1+y_1x_1=2\,x_1y_1$.

Comunque sia, soffermiamoci su un esempio.

Sempre con riferimento alla precedente equazione (3), ma con il supporto di un foglio elettronico, si trova:

$$x_2 = x_1y_1 + y_1x_1 = 2\times 6\times 19 = 228\,;$$

di conseguenza:

$$y_2 = \sqrt{10\cdot 228^2+1} = \sqrt{519.841} = 721.$$

Si ottiene così una seconda soluzione dell'equazione in esame: $(x_2=228, y_2=721)$.

Procediamo:

$$x_3 = x_1y_2 + y_1x_2 = 6 \times 721 + 19 \times 228 = 8.658\,;$$

di conseguenza:

$$y_3 = \sqrt{10 \cdot 8.658^2 + 1} = \sqrt{749.609.641} = 27.379\,.$$

Si ottiene così una terza soluzione dell'equazione: $(x_3=8.658, y_3=27.379)$.

Ancora:

$$x_4 = x_1y_3 + y_1x_3 = 6 \times 27.379 + 19 \times 8.658 = 328.776;$$

di conseguenza:

$$y_4 = \sqrt{10 \cdot 328.776^2 + 1} = \sqrt{1.080.936.581.761} = 1.039.681\,.$$

Si ottiene dunque una quarta soluzione dell'equazione: $(x_4=328.776, y_4=1.039.681)$.

Compatibilmente con i calcoli da eseguire, in linea teorica si può continuare all'infinito.

Brahmagupta ha risolto l'equazione (1) in molti casi e certamente l'ha fatto per $a=83$, ottenendo la soluzione $(x_1=9, y_1=82)$ Considerata al riguardo l'equazione ausiliaria $83\,p^2+k=q^2$, per $p=1$ e $k=-2$, si ottiene $q=9$. Di conseguenza, prendendo $x>0$, $y>0$:

$$x = \frac{2\,p\,q}{k} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 9}{2} = 9 \quad \text{e} \quad y = \frac{a\,p^2 + q^2}{k} = \frac{83 \cdot 1 + 81}{2} = 82.$$

A titolo di curiosità, sembra che Brahmagupta abbia asserito che ci vuole un anno per trovare le soluzioni dell'equazione (1) quando $a=92$. Ammesso che questa sua affermazione sia vera, credo che egli non volesse riferirsi alla determinazione della prima soluzione che è piuttosto semplice, anche senza l'uso di strumenti di calcolo automatico, ma alle soluzioni successive. In realtà, la determinazione della prima soluzione dell'equazione, utilizzando proprio la sua regola, non presenta difficoltà insuperabili. Di fatto, considerata l'equazione ausiliaria:

$$92\,p^2 + k = q^2\,,$$

si trova dapprima che i valori 1, 2, 3, 4 di p non portano a nulla, ma per $p=5$ si ottiene: $q^2=92\cdot25+k=2.300+k$; per cui basta prendere $k=4$ per avere il quadrato perfetto $q^2=2.304$ e quindi $q=48$. Di conseguenza:

$$x = \frac{2\,p\,q}{k} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 48}{4} = 120 \quad \text{e} \quad y = \frac{a\,p^2 + q^2}{k} = \frac{92 \cdot 25 + 2.304}{4} = 1.151\,.$$

Si ottiene così la prima soluzione $(x_1=120, y_1=1.151)$.

Ma già la determinazione della seconda soluzione presenta più di una difficoltà, a causa di calcoli non proprio semplicissimi, se fatti "a mano", come era costretto a fare appunto Brahmagupta. Comunque, in base alle formule suddette, si trova:

$$x_2 = x_1y_1 + y_1x_1 = 2 \times 120 \times 1.151 = 276.240\,;$$

di conseguenza:

$$y_2 = \sqrt{92 \cdot 276.240^2 + 1} = \sqrt{7.020.385.459.201} = 2.649.601.$$

Si ottiene così la seconda soluzione dell'equazione in esame: $(x_2=276.240, y_2=2.649.601)$.

Risultato che adesso fa capire meglio l'affermazione di Brahmagupta.

4. Fu Bhaskara II (XII secolo), sette secoli dopo Brahmagupta, che perfezionò il metodo di questi e, precisamente, sviluppò un procedimento ricorsivo, denominato *Chakravala*, per trovare le infinite soluzioni dell'equazione dopo averne trovata una. Egli fornì così soluzioni dell'equazione in molti casi e, in particolare, nei cinque casi in cui $a = 8, 11, 32, 61, 67$.

Il fatto notevole è che lo fece senza utilizzare strumenti di calcolo automatico, che peraltro non possedeva.

Il metodo *Chakravala* fu definito dal matematico tedesco Hermann Hankel (1839-1873) «*la cosa più bella che, prima di Lagrange, sia stata realizzata in teoria dei numeri*».

Carl B. Boyer [1, pag. 261] scrive che nel caso in cui $a=61$, Bhaskara II avrebbe trovato la soluzione $(x=22.615.390, y=1.776.319.049)$.

L'informazione è sbagliata, ma non sono in grado di dire se si tratta di una distrazione di Boyer o di un errore del traduttore o di qualche errore di stampa o addirittura, ma non lo credo, di un errore originario di Baskara II.

In realtà, le cose stanno in questi termini:

- nel caso in cui a=32, si ha la soluzione (**x=22.615.390**, y=127.931.965);
- nel caso in cui a=61, si ha la soluzione (x=226.153.980, **y=1.766.319.049**).

Ancora una curiosità riguardante l'equazione quando a=61, per dire che la sua soluzione minima non fu conosciuta in Europa prima che Eulero la trovasse autonomamente nel XVIII secolo.

La ricerca della soluzione dell'equazione – ma non con a=61, bensì con a=109, 149, 433 – era stata proposta come problema da Pierre de Fermat in una lettera del 1657.

Fu il matematico britannico William Brouncker (1620-1684) colui che per primo rispose alla sfida di Fermat e, pur senza fornire una regola generale, riuscì a risolvere l'equazione (1) in molti casi particolari. Il suo ragionamento è basato sulle frazioni continue e sulla ricorsione. Secondo alcuni, egli avrebbe trovato la soluzione dell'equazione per a=61 ancor prima di Eulero

Il metodo di Brouncker, per un errore di attribuzione commesso proprio da Eulero, fu ritenuto opera del matematico inglese John Pell (1611-1685), che per la verità non si era mai occupato di quell'equazione, salvo che per divulgare i risultati che altri avevano trovato. Da allora, in seguito a questo errore, l'equazione (1) è denominata *equazione di Pell*, a volte anche *equazione di Pell-Eulero*.

Fu comunque proprio Eulero a dimostrare che se l'equazione (1) ammette una soluzione allora ne ammette infinite. Dimostrò questo fin da 1730 in una sua corrispondenza con l'amico Christian Goldbach.

Successivamente, nel 1768, Lagrange dimostrò l'esistenza di infinite soluzioni dell'equazione (1) per ogni valore di a, **purché a non sia un quadrato perfetto**. E trovò dell'equazione la soluzione generale completa. Il suo ragionamento è basato sullo sviluppo di $\sqrt{a}$ in frazione continua periodica.

Oggigiorno, potendo disporre di strumenti di calcolo automatico, la ricerca delle soluzioni dell'equazione di Pell è molto facilitata. Cosicché, per trovare le infinite soluzioni (positive) dell'equazione (1), purché a, intero positivo, non sia un quadrato perfetto, va bene l'uso delle seguenti formule, alle quali abbiamo già accennato:

$$x_n = y_1 x_{n-1} + x_1 y_{n-1}\,, \quad y_n = \sqrt{a\,x_n^2 + 1}\,, \qquad n \geq 2\,,$$

a condizione che sia stata trovata la cosiddetta *soluzione base*, ossia (x_1, y_1).

In alternativa, se necessario, per y_n può essere utilizzata la seguente formula:

$$y_n = a\,x_1 x_{n-1} + y_1 y_{n-1}\,.$$

Attenzione! Quello di trovare la soluzione base di un'equazione di Pell non è un problema secondario e facile. Tutt'altro. Esiste un metodo basato sulle frazioni continue, ma non ce ne possiamo occupare. Ci accontentiamo di trovarla per tentativi, servendoci se occorre di uno strumento di calcolo automatico. Oppure, almeno nei casi più semplici, applicando la regola di Brahmagupta. O anche, se proprio non se ne può fare a meno, ricorrendo all'I.A.

Si tenga presente che la soluzione base non è la coppia $(0, 1)$, che è soluzione comune ad ogni equazione (1). Applicando ad essa le formule ricorsive considerate sopra, si genera inoltre ripetutamente la coppia (0,1).

Vediamo comunque alcuni esempi, prendendoli proprio dai casi proposti da Bhaskara II:

- con **a=8** si ha $(x_1, y_1)=(1, 3)$: soluzione che si "vede" essendo $8\cdot 1^2+1=3^2$. Di conseguenza:

$$x_n = y_1\,x_{n-1} + x_1\,y_{n-1} = 3\,x_{n-1} + 1\,y_{n-1}, \quad y_n = \sqrt{a\,x_n^2 + 1} = \sqrt{8\,x_n^2 + 1}$$

e perciò:

$$x_2 = 3\,x_1 + y_1 = 3\cdot 1 + 3 = 6, \quad y_2 = \sqrt{8\cdot 6^2 + 1} = \sqrt{289} = 17\,,$$

$$x_3 = 3\,x_2 + y_2 = 3\cdot 6 + 17 = 35, \quad y_3 = \sqrt{8\cdot 35^2 + 1} = \sqrt{9.801} = 99\,,$$

$$x_4 = 3\,x_3 + y_3 = 3\cdot 35 + 99 = 204, \quad y_4 = \sqrt{8\cdot 204^2 + 1} = \sqrt{332.929} = 577\,,$$

e così via;

- con **a=11** si ha $(x_1, y_1)=(3, 10)$: anche questa soluzione si "vede" essendo $11\cdot 3^2+1=10^2$. Di conseguenza:

$$x_n = 10\,x_{n-1} + 3\,y_{n-1}\,, \quad y_n = \sqrt{11\,x_n^2 + 1}$$

e perciò, fermandoci alla terza soluzione:

$$x_2=10\,x_1+3\,y_1=10\cdot3+3\cdot10=60,\quad y_2=\sqrt{11\cdot60^2+1}=\sqrt{39.601}=199,$$
$$x_3=10\,x_2+3\,y_2=10\cdot60+3\cdot199=1.197,\quad y_3=\sqrt{11\cdot1.197^2+1}=\sqrt{15.760.900}=3.970;$$

- con **a=32** ricorriamo alla regola di Brahagupta. Consideriamo perciò l'equazione ausiliaria $32\,p^2+k=q^2$.
  Per p=1 si ha $q^2=32+k$, per cui, se si prende k=4, si ottiene il quadrato perfetto $q^2=36$ e quindi q=6. Pertanto:
  $$x=\frac{2\,p\,q}{k}=\frac{2\times1\times6}{4}=3\,.$$
  Va bene e, di conseguenza, si trova:
  $$y=\sqrt{32\cdot x^2+1}=\sqrt{32\cdot3^2+1}=\sqrt{289}=17\,.$$
  Si ha dunque $(x_1,y_1)=(3,17)$ e di conseguenza:
  $$x_n=17\,x_{n-1}+3\,y_{n-1}\,,\quad y_n=\sqrt{32\,x_n^2+1}$$
  e perciò, fermandoci ancora alla terza soluzione:
  $$x_2=17\,x_1+3\,y_1=17\cdot3+3\cdot17=102,\quad y_2=\sqrt{32\cdot102^2+1}=\sqrt{332.929}=577,$$
  $$x_3=17\,x_2+3\,y_2=17\cdot102+3\cdot577=3.465,\quad y_3=\sqrt{32\cdot3.465^2+1}=\sqrt{384.199.201}=19.601.$$

Nei casi in cui a=61 e a=67 il ricorso alla regola di Brahmagupta per trovare la soluzione base, pur possibile in linea teorica, è troppo dispendioso. Conviene ricorrere all'I.A., se non si sanno utilizzare le frazioni continue.

Ebbene:

- con **a=61** si ha $(x_1,y_1)=(226.153.980, 1.766.319.049)$, soluzione già vista prima. Di conseguenza risulta (qui conviene servirsi della formula alternativa per il calcolo di y_n):
  $$x_n=1.766.319.049\,x_{n-1}+226.153.980\,y_{n-1}\,,\quad y_n=61\cdot226.153.980\,x_{n-1}+1.766.319.049\,y_{n-1}$$
  e perciò:
  $$x_2=1.766.319.049\,x_1+226.153.980\,y_1=1.766.319.049\cdot226.153.980+226.153.980\cdot1.766.319.049=$$
  $$=798.920.165.762.330.040,$$
  $$y_2=61\cdot226.153.980\,x_1+1.766.319.049\,y_1=$$
  $$=13.795.392.780\cdot226.153.980+1.766.319.049\cdot1.766.319.049=6.239.765.965.720.528.801$$
  e così via;
- con **a=67** si ha $(x_1,y_1)=(5.967, 48.842)$ e di conseguenza risulta (anche qui conviene servirsi della formula alternativa per il calcolo di y_n):
  $$x_n=48.842\,x_{n-1}+5.967\,y_{n-1}\,,\quad y_n=67\cdot5.967\,x_{n-1}+48.842\,y_{n-1}$$
  e perciò:
  $$x_2=48.842\,x_1+5.967\,y_1=48.842\cdot5.967+5.967\cdot48.842=582.880.428,$$
  $$y_2=67\cdot5.967\,x_1+48.842\,y_1=399.789\cdot5.967+48.842\cdot48.842=4.771.081.927.$$
  e così via.

Naturalmente quelli presi in esame non sono i soli casi possibili. Ne propongo altri, riportando nella tabella sottostante (tabella 2) le soluzioni base dell'equazione (1) corrispondenti ad alcuni valori di a, precisamente quelli compresi fra 2 e 72 ma con $x\geq12$, escludendo ovviamente quelli già studiati ($a=61,67$).

a	(x_1,y_1)	**a**	(x_1,y_1)	**a**	(x_1,y_1)	**a**	(x_1,y_1)	**a**	(x_1,y_1)
13	$(180,649)$	**29**	$(1.820,9.801)$	**44**	$(30,199)$	**53**	$(9.100,66.249)$	**59**	$(69,530)$
19	$(39,170)$	**31**	$(273,1.520)$	**45**	$(24,161)$	**54**	$(66,485)$	**65**	$(16,129)$
21	$(12,55)$	**37**	$(12,73)$	**46**	$(3.588,24.335)$	**55**	$(12,89)$	**69**	$(936,7.775)$
22	$(42,197)$	**41**	$(320,2.049)$	**50**	$(14,99)$	**57**	$(20,151)$	**70**	$(30,251)$
28	$(24,127)$	**43**	$(531,3.482)$	**52**	$(90,649)$	**58**	$(2.574,19.603)$	**71**	$(413,3.480)$

tabella 2

Le soluzioni base corrispondenti ai valori di a compresi fra 2 e 72, ma con $x<12$, sono lasciati all'eventuale lettore, qualora volesse occuparsene. Così come è lasciata al lettore la ricerca di altre soluzioni dopo quella base (x_1,y_1). L'uso di un foglio elettronico può far comodo.

A titolo di esempio, fornisco la catena, naturalmente parziale, delle soluzioni dell'equazione (1) nel caso in cui si consideri il più piccolo valore di a, vale a dire a=2 (tabella 3).

Soluzioni (parziali) dell'equazione di Pell: $2x^2+1=y^2$.											
x	2	12	70	408	2.378	13.860	80.782	470.832	2.744.210	15.994.428	...
y	3	17	99	577	3.363	19.601	114.243	665.857	3.880.899	22.619.537	...

tabella 3

Chi ha avuto la ventura di leggere queste note e di riflettere sull'enunciato del teorema di Lagrange si sarà chiesto probabilmente perché il coefficiente a non deve essere un quadrato perfetto.

La spiegazione è semplice e immediata: perché se così fosse, l'equazione (1) avrebbe la sola soluzione $(0, 1)$.

Infatti, se fosse $a=k^2$, con k intero qualsiasi non nullo, l'equazione (1) si potrebbe mettere in questa forma:

$$k^2 x^2 + 1 = y^2 \quad \text{ossia} \quad y^2 - k^2x^2 = 1,$$

e si avrebbe:

$$(y + k\,x)(y - k\,x) = 1\,.$$

Siccome le varabili in gioco sono tutti numeri interi, si desume che può essere soltanto:

$$\begin{cases} y + k\,x = 1 \\ y - k\,x = 1 \end{cases}$$

Si ottiene la soluzione $(0, 1)$, che, come abbiamo spiegato nella nota precedente, genera ripetutamente se stessa applicando le formule ricorsive già considerate.

Per la cronaca, le soluzioni base dell'equazione (1) per i valori di a proposti da Fermat sono le seguenti:

- con $a=109$:

$$x_1 = 15.140.424.455.100, \quad y_1 = 158.070.671.986.249;$$

- con $a=149$:

$$x_1 = 2.113.761.020, \quad y_1 = 25.801.741.449;$$

- con $a=433$:

$$x_1 = 5.025.068.784.834.899.736, \quad y_1 = 104.564.907.854.286.695.713.$$

5. Ci occupiamo adesso della seconda equazione di Pell:

(2) $$a\,x^2 - 1 = y^2,$$

dove a è un intero maggiore di 1.

A volte questa equazione è chiamata *equazione di Pell negativa*.

Anche la risoluzione generale di questa equazione si deve a Lagrange e sempre la sua dimostrazione è basata sullo sviluppo di $\sqrt{a}$ in frazione continua periodica.

A differenza dell'equazione (1), che ammette infinite soluzioni intere per ogni valore positivo di a, che non sia un quadrato perfetto, l'esistenza di soluzioni intere dell'equazione (2) non è assicurata, ma dipende dal numero delle cifre del periodo dello sviluppo di $\sqrt{a}$ in frazione continua periodica, sempre che a non sia un quadrato perfetto. Precisamente, se e solo se detto periodo è un numero dispari, l'equazione ammette soluzioni intere; non ne ammette invece se esso è pari.

Vediamo qualche esempio, per capire meglio.

Consideriamo a tale riguardo gli sviluppi in frazioni continue di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}} \qquad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

In sintesi, come solitamente si scrive: $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$, $\sqrt{3} = [1; \overline{12}]$.

Il periodo dello sviluppo di $\sqrt{2}$ è 2: quindi un numero dispari di cifre. Invece il periodo dello sviluppo di $\sqrt{3}$ è 12: quindi un numero pari di cifre. Nel primo caso, in cui $a=2$, l'equazione (2) ammette soluzioni intere, nel secondo, in cui $a=3$, non ne ammette.

Se poi a è un quadrato perfetto, si dimostra facilmente che l'equazione non ammette soluzioni intere. Basta ripetere un ragionamento già fatto per l'altra equazione di Pell.

Di fatto, se fosse $a=k^2$, con $k>1$, l'equazione assumerebbe la forma seguente:

$$k^2x^2 - 1 = y^2 \quad \text{ossia} \quad k^2x^2 - y^2 = 1 \quad \text{o anche} \quad (kx + y)(kx - y) = 1\,.$$

Considerato che le variabili in gioco sono numeri interi e tenuto presente che prendiamo solo valori positivi di x, y, può essere solamente:

$$\begin{cases} k\,x + y = 1 \\ k\,x - y = 1 \end{cases}$$

da cui segue: $(x=1/k, y=0)$. Soluzione non accettabile poiché x non è un numero intero.

Ora, una volta trovata la soluzione base (x_1, y_1) utilizzando lo sviluppo di $\sqrt{a}$ in frazione continua (o eventualmente per tentativi, specialmente nei casi semplici), si può procedere alla determinazione di altre soluzioni in base alle seguenti formule:

$$x_n = (a\,{x_1}^2 + {y_1}^2)\,x_{n-1} + 2\,x_1 y_1 y_{n-1}, \quad y_n = \sqrt{a\,{x_n}^2 - 1}, \qquad n \geq 2.$$

In alternativa, se necessario, per y_n può essere utilizzata la seguente formula:

$$y_n = (a\,{x_1}^2 + {y_1}^2)\,y_{n-1} + 2\,a\,x_1 y_1 x_{n-1}\,.$$

S'intende che l'uso di un foglio elettronico aiuta.

Per esempio, per $a=2$, per cui l'equazione (2) diventa $2\,x^2\text{-}1=y^2$, la soluzione base è $(x_1=1, y_1=1)$. Quindi:

$$x_2 = (a\,{x_1}^2 + {y_1}^2)\,x_1 + 2\,x_1 y_1 y_1 = (2\cdot 1^2 + 1^2)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 5\,,$$

$$y_2 = \sqrt{2\cdot {x_2}^2 - 1} = \sqrt{2\cdot 5^2 - 1} = \sqrt{49} = 7\,.$$

A seguire:

$$x_3 = (a\,{x_1}^2 + {y_1}^2)\,x_2 + 2\,x_1 y_1 y_2 = (2\cdot 1^2 + 1^2)\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 7 = 29\,,$$

$$y_3 = \sqrt{2\cdot {x_3}^2 - 1} = \sqrt{2\cdot 29^2 - 1} = \sqrt{1681} = 41\,.$$

Senza dilungarci oltre su questa questione, diciamo a titolo di esempio che, indagando sui valori di a minori di 27, si trova che l'equazione (2) ammette soluzioni intere per i seguenti valori di a: 2, 5, 10, 13, 17, 26; non ne ammette invece per gli altri valori di a.

In particolare, ecco le prime 4 soluzioni intere dell'equazione (2) per i valori di a segnalati sopra (tabella 4):

a	x	y	a	x	y
2	1	1	13	5	18
	5	7		6.485	23.382
	29	41		8.417.525	30.349.818
	169	239		10.925.940.965	39.394.040.382
5	1	2	17	1	4
	17	38		65	268
	305	682		4.289	17.684
	5.473	12.238		283.009	1.166.876
10	1	3	26	1	5
	37	117		101	515
	1.405	4.443		10.301	52.525
	53.353	168.717		1.050.601	5.357.035

tabella 4

Senza utilizzare lo sviluppo di $\sqrt{a}$ in frazione continua, le soluzioni base sono state trovate o perché sono evidenti (nei primi tre casi, $a=2, 5, 10$, e negli ultimi due, $a=17, 26$) o per tentativi (nel quarto caso, $a=13$).

POSTILLA.

Luigi Verolino, professore ordinario di Elettrotecnica nell'Università Federico II di Napolin ha segnalato, tramite Emilio Ambrisi che, nei miei articoli sull'antica matematica indiana, non ho dato la giusta enfasi a un fatto epocale come l'introduzione dello 0 nella matematica. Ha ragione. Mentre lo ringrazio, provo a rimediare.

Incomincio col dire che ci furono nell'antichità, in epoche diverse, civiltà che fecero dei timidi tentativi di introdurre nei loro sistemi di numerazione qualcosa che sostituisse lo 0, che non avevano; qualcosa tipo un simbolo speciale (Babilonesi) o uno spazio vuoto (Babilonesi, Cinesi).

Ma il primo passo importante, benché non ancora decisivo, avvenne in India. Qui è stato rinvenuto nel 1881 un reperto cosciuto come il *Manoscritto di Bakhshali*, un compendio di regole ed esercizi di matematica, risalenti probabilmente ad un periodo imprecisato compreso tra il III e il IV secolo dell'era cristiana, nel quale documento compare il simbolo "●" per lo zero. Il "puntino nero pieno" è chiamato *shunya-bindu* dagli indiani. Il passo non è decisivo poiché a questo simbolo non è ancora riconosciuto il diritto di essere considerato un numero vero e proprio.

Questo successe esattamente con Brahmagupta. Fu lui che attribuì allo zero questo diritto, conferendogli la dignità di numero. Nel suo *Brāhmasphuṭa Siddhānta* (628) compare infatti la definizione dello ***zero***, inteso come ***numero che si ottiene sottraendo un qualsiasi numero da se stesso***. Dello zero egli definisce poi alcune proprietà che ho già segnalato nel precedente articolo sulla matematica indiana antica e che qui riporto: *Il prodotto di zero per un numero negativo o di zero per un numero positivo è zero; di due zeri è zero*.

Ricordo poi che Brahmagupta non riuscì a risolvere la questione della divisione per zero, riguardo la quale fece un po' di confusione.

Il simbolo usato per lo zero continua ad essere un puntino pieno nero come nel *Manoscritto di Bakhshali.* Non ci vorrà però molto tempo perché questo puntino si evolva nella forma che usiamo oggigiorno: un "cerchietto cavo" (*chidra*) (ad essere pignoli, la nostra rappresentazione dello zero non è esattamente un cerchietto, ma un ovale). Di fatto, alcune iscrizioni datate 684, rinvenute a Sumatra, nell'Indonesia, mostrano l'uso del cerchietto vuoto per rappresentare lo zero. Per quanto se ne sa, sembra che questa sia stata la prima volta.

Il sistema di numerazione indiano, compresa la presenza rivoluzionaria dello zero, passò agli Arabi e per mezzo loro agli Europei. Ma di questo avrò modo di occuparmi più diffusamente in un prossimo articolo, che sarà dedicato ad uno dei più importanti matematici arabi: al-Khwārizmī. Qui mi limito ad anticipare che al-Khwārizmī adottò il simbolo "0" per lo zero. In Europa questo simbolo cominciò ad essere usato all'inizio, dal XII secolo, dapprima con la traduzione delle sue opere, ma soprattutto, dal XIII secolo, con le opere di Leonardo Fibonacci.

Mi pongo, a questo punto, una domanda: perché l'introduzione dello zero costituì una vera e propria rivoluzione?

In fondo, la risposta è semplice: perché ha cambiato il modo di calcolare e di pensare.

Elenco alcuni fatti connessi con l'introduzione dello zero nella matematica:

- il sistema posizionale non funziona senza qualcosa che rappresenti lo zero (si pensi ai Babilonesi, i quali, avendo inventato un sistema posizionale, sono stati costretti a surrogare con un simbolo particolare o con uno spazio vuoto la mancanza dello 0); solo con la presenza dello 0 è infatti possibile distinguere numeri come, per esempio, 25, 250, 205;
- l'introduzione dello zero, con la dignità di numero, ha trasformato il concetto di "nulla" e ha reso possibile operare in colonna con le quattro operazioni fondamentali (se, per esempio, in una fase dell'addizione di numeri in colonna salta fuori come somma parziale uno dei numeri dieci, venti, trenta, eccetera, solo la presenza dello 0 rende possibile proseguire con l'algoritmo);
- senza la presenza dello 0 non sarebbe stato possibile introdurre e utilizzare i numeri negativi;
- solo la presenza dello 0 permette di scrivere un numero come prodotto di un coefficiente per una potenza di dieci;
- senza lo 0 non sarebbe possibile scrivere la forma canonica di un'equazione algebrica:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0\,.$$

Questo elenco di proprietà dello zero, ancorché parziale, fa capire perfettamente perché la sua introduzione è stata veramente un fatto epocale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, traduzione italiana di Adriano Carugo, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980, pagg. 242-262.

[2] Iolanda Guevara Casanova – Charles Puig Pla, *Brahmagupta: l'algebra delle stelle*, traduzione di Beatrice Barbarossa, Milano, RBA Italia, 2018.

[3] Wikipedia, libera enciclopedia on-line.