

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = ax - \ln(a + x)$, con $a \in \mathbb{R}$, e si indichi con γ_a il grafico di f_a .

- Al variare del parametro a , calcolare i limiti agli estremi del dominio e studiare la monotonia e la concavità di f_a .
- Stabilire per quali valori del parametro il grafico γ_a possiede un punto stazionario e determinare il valore di a affinché tale punto abbia ordinata massima.
- Verificare che, se $a = 1$, γ_a è tangente all'asse delle ascisse. Studiare la funzione f_1 e tracciare il suo grafico γ_1 .
- Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse delle ascisse, γ_1 e la retta di equazione $x = 2$.

Soluzione**Punto a**

Dato che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo ($a + x > 0$), per ogni fissato $a \in \mathbb{R}$ il **dominio** della funzione è:

$$D_a =]-a, +\infty[$$

1. Limiti agli estremi del dominio

Per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} [ax - \ln(a + x)] = -a^2 - \lim_{x \rightarrow -a^+} \ln(a + x) = +\infty$$

La retta $x = -a$ è un **asintoto verticale** di γ_a per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Il comportamento all'infinito dipende dal segno di a ,

- $a < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax - \ln(a + x)] = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

- $a = 0$:

$$f_0(x) = -\ln(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

- Il caso $a > 0$ presenta una forma di indecisione del tipo $+\infty - \infty$.

Per la gerarchia degli infiniti (o applicando la regola di De L'Hôpital) si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax - \ln(a+x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(a - \frac{\ln(a+x)}{x} \right) = +\infty \cdot (a-0) = +\infty$$

Per verificare la presenza di eventuali **asintoti obliqui** della forma $y = mx + q$ per $x \rightarrow +\infty$, occorre calcolare separatamente i due limiti:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x} \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_a(x) - mx]$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \ln(a+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{\ln(a+x)}{x} \right) = a - 0 = a$$

Il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo vale dunque **$m = a \neq 0$** .

Il valore di q corrisponde al seguente limite, se esiste ed è finito

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_a(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [ax - \ln(a+x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\ln(a+x)] = -\infty$$

Tutte le funzioni della famiglia $f_a(x)$ diventano infinite per $x \rightarrow +\infty$ ma **non ammettono asintoti obliqui**

Studio della monotonia

Calcoliamo la derivata prima $f'_a(x)$:

$$f'_a(x) = a - \frac{1}{a+x} = \frac{a(a+x) - 1}{a+x} = \frac{a^2 + ax - 1}{a+x}$$

Poiché se $x \in D_a$ risulta $a+x > 0$, il segno della derivata prima dipende esclusivamente dal numeratore $N(x) = a^2 + ax - 1$.

$$N(x) = a^2 + ax - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1-a^2}{a} = \frac{1}{a} - a \quad \text{se } a \neq 0$$

$$N(x) > 0 \begin{cases} \rightarrow x > \frac{1}{a} - a & \text{se } a > 0 \\ \rightarrow x < \frac{1}{a} - a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$N(x) = -1 < 0 \quad \text{se } a = 0$$

$a = 0$: la funzione è decrescente in tutto il dominio e non presenta punti stazionari (la funzione si riduce $-\ln x$, funzione opposta della funzione logaritmica asintotica all'asse delle y)

$$f'_0(x) = -\frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$a < 0$ La funzione è crescente nei punti in cui siano soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} x < \frac{1}{a} - a & \text{positività della derivata} \\ x > -a & \text{appartenenza al dominio} \end{cases}$$

Le due condizioni sono incompatibili in quanto $\frac{1}{a} - a < -a$, pertanto

$a < 0$: la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio $(-a, +\infty)$ e non possiede estremanti relativi

$a > 0$ La funzione è crescente nei punti in cui sono soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} x > \frac{1}{a} - a & \text{positività della derivata} \\ x > -a & \text{appartenenza al dominio} \end{cases}$$

essendo $\frac{1}{a} - a > -a$ le due condizioni si riducono a una sola : $x > \frac{1}{a} - a$

$a > 0$: la funzione è decrescente in $\left]-a, \frac{1}{a} - a\right[$, crescente in $\left]\frac{1}{a} - a, +\infty\right[$ e presenta un punto stazionario in $x_0 = \frac{1}{a} - a$

Studio della concavità

La derivata seconda $f_a''(x) = \frac{a^2 + ax - a^2 - ax + 1}{(a+x)^2} = \frac{1}{(a+x)^2} > 0 \quad \forall x \in (-a, +\infty), \forall a \in \mathbb{R}$

Tutte le funzioni della famiglia volgono la concavità verso l'alto in ogni punto e non ammettono punti di flesso

Punto b

Per quanto osservato nel punto a, il grafico γ_a possiede in un punto stazionario, $x_0 = \frac{1}{a} - a$, solo per **$a > 0$** .

Si tratta di un punto di minimo relativo e assoluto, la cui ordinata è

$$f_a\left(\frac{1}{a} - a\right) = a\left(\frac{1}{a} - a\right) - \ln\left(a + \frac{1}{a} - a\right) = 1 - a^2 - \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - a^2 + \ln a$$

Consideriamo la funzione $g(a) = 1 - a^2 + \ln a$, definita per $a \in (0, +\infty)$. Per trovare per quale valore di a tale ordinata assume il suo valore massimo, studiamo la derivata di $g(a)$ rispetto ad a :

$$g'(a) = -2a + \frac{1}{a} = \frac{1-2a^2}{a}$$

Nell'intervallo $a > 0$ il denominatore è positivo, il numeratore ammette un solo zero: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pertanto: $g'(a) > 0$ nell'intervallo $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $g'(a) < 0$ nell'intervallo $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Per $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la funzione $g(a)$ è **strettamente crescente**.
- Per $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$, la funzione $g(a)$ è **strettamente decrescente**.

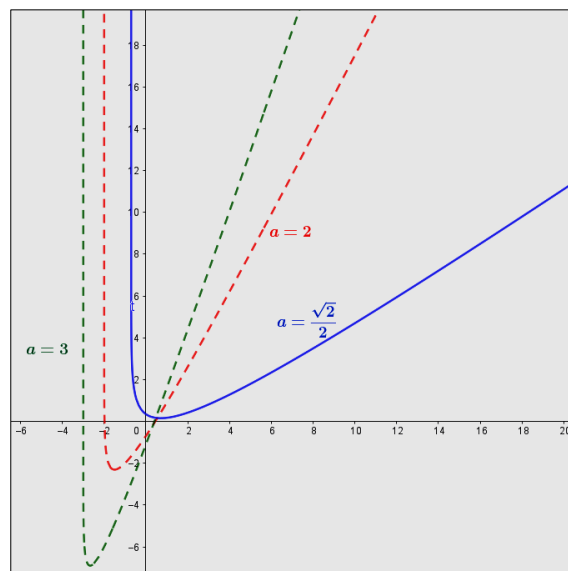
Inoltre $\lim_{a \rightarrow 0^+} g(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} g(a) = -\infty$

Di conseguenza, $g(a)$ ammette un massimo relativo e assoluto in $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Esempi grafici

Nella figura seguente si possono confrontare i grafici di

$f_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$



Punto c

La funzione $f_1(x) = x - \ln(1+x)$ corrisponde ad un valore positivo del parametro a .

Si possono dedurre alcune sue proprietà dallo studio della generica $f_a(x)$ con $a > 0$.

$D_1 =]-1, +\infty[$ $x = -1$ è asintoto verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$ e non esiste l'asintoto obliquo

La concavità è rivolta verso l'alto in ogni punto. Non ci sono flessi.

La funzione ammette un punto di minimo di ascissa $x_0 = \frac{1}{a} - a = 0$ e ordinata

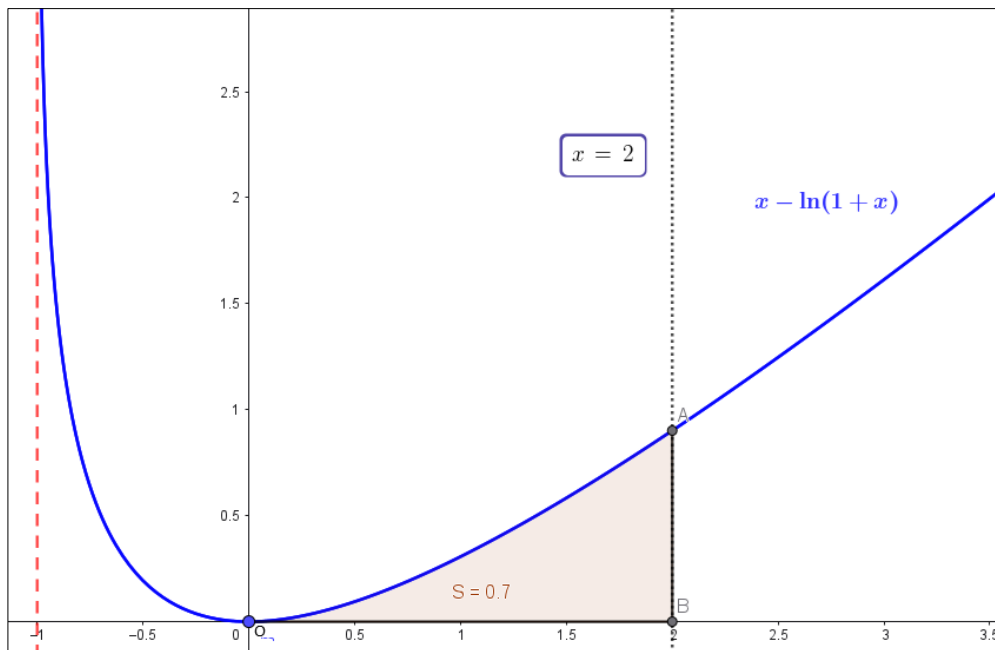
$$f_1(0) = 1 - 1 + \ln 1 = 0.$$

Essendo $f_1'(x) = \frac{x}{x+1} \rightarrow f_1'(0) = 0$ possiamo affermare che

$f_1(x)$ ha un punto di minimo in (0,0) con tangente coincidente con l'asse x

Punto d

La regione piana, limitata, compresa tra l'asse delle ascisse, γ_1 e la retta di equazione $x = 2$, è il triangolo mistilineo OAB rappresentato in figura, la cui area è uguale $\int_0^2 [x - \ln(1+x)] dx$



$$\int_0^2 [x - \ln(1+x)] dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 - \int_0^2 \ln(1+x) dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2$$

Per il secondo integrale utilizziamo il metodo di integrazioni per parti.

$$\int \ln(1+x) dx =$$

$$x \ln(1+x) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = x \ln(1+x) - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) = (x+1)\ln(1+x) - x + c$$

$$\int_0^2 \ln(1+x) dx = [(x+1)\ln(1+x) - x]_0^2 = 3\ln(3) - 2$$

$$\int_0^2 [x - \ln(1+x)] dx = 2 - 3\ln(3) + 2 = 4 - 3\ln(3) \cong 0,7$$