

Quesito 6

Assegnata la curva $y = 2 + (x + 2k)e^{1-x}$, determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta tangente nel suo punto di flesso passi per il punto $P(1; 2)$.

Soluzione

Anche se non richiesto in modo esplicito, studiamo l'andamento della funzione

$$y(x) = 2 + (x + 2k)e^{1-x} \text{ al variare di parametro } k$$

Segno della derivata prima e second

$$y'(x) = e^{1-x} - (x + 2k)e^{1-x} = e^{1-x}(1 - x - 2k) \geq 0 \rightarrow$$

$$1 - x - 2k \geq 0 \text{ essendo } e^{1-x} > 0 \quad \forall x$$

$$y'(x) = 0 \text{ per } x = 1 - 2k$$

$$y'(x) > 0 \text{ per } x < 1 - 2k$$

$$y'(x) < 0 \text{ per } x > 1 - 2k$$

$y(x)$ è crescente per $x < 1 - 2k$, decrescente per $x > 1 - 2k$

Il punto M di coordinate $(1 - 2k; 2 + e^{2k})$ è massimo relativo

Segno della derivata seconda

$$y''(x) = -(1 - x - 2k)e^{1-x} - e^{1-x} = e^{1-x}(-1 + x + 2k - 1) = e^{1-x}(-2 + x + 2k) \geq 0 \rightarrow$$

$$x \geq 2 - 2k$$

$$y''(x) = 0 \text{ per } x = 2 - 2k$$

$$y''(x) > 0 \text{ per } x > 2 - 2k$$

$$y''(x) < 0 \text{ per } x < 2 - 2k$$

$y(x)$ è concava per $x < 2 - 2k$, convessa per $x \geq 2 - 2k$

Il punto **F** di coordinate $(2 - 2k; 2 + 2e^{2k-1})$ è punto di flesso

Il coefficiente angolare della tangente inflessionale è uguale a $y'(2 - 2k) = -e^{2k-1}$ e la sua equazione è

$$y - 2 - 2e^{2k-1} = -e^{2k-1}(x - 2 + 2k)$$

Sostituendo $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ l'uguaglianza $-2e^{2k-1} = -e^{2k-1}(2k - 1)$ risulta verificata se

$$-2 = -(2k - 1) \rightarrow 3 = 2k \text{ essendo } e^{2k-1} \neq 0 \quad \forall k$$

Il valore del parametro reale k in corrispondenza del quale la retta tangente nel punto F passa per il punto $P(1; 2)$ è $k = \frac{3}{2}$

L'equazione della curva assume la forma $y(x) = 2 + (x + 3)e^{1-x}$

il punto F ha coordinate $(-1; 2 + 2e^2)$

Grafico

