

Quesito 7

Si consideri la funzione $f(x) = 2 - \frac{4e^x}{1+e^x}$. Dimostrare che f è invertibile in $\mathbb{R}$. Indicata con g la funzione inversa, scrivere la sua espressione analitica e determinare le equazioni degli asintoti di g .

Soluzione

La funzione $f(x) = 2 - \frac{4e^x}{1+e^x}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ essendo $e^x \neq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si verifica facilmente che $-2 < f(x) < 2$

Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2^-$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2^+$, l'insieme immagine è l'intervallo $] -2, 2[$

La retta di equazione $y = 2$ è asintoto orizzontale sinistro.

La retta di equazione $y = -2$ è asintoto orizzontale destro

Dimostrazione dell'invertibilità

Una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva .

Essendo la derivata $f'(x) = -4 \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = -4 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ è strettamente decrescente e, quindi è iniettiva in $\mathbb{R}$.

E' invertibile in quanto definisce una corrispondenza biunivoca tra il suo dominio e l'insieme immagine, l'intervallo $] -2, 2[$.

Espressione analitica e asintoti

La funzione inversa si ottiene applicando a $f(x)$ una simmetria rispetto alla retta di equazione $y = x$, cioè scambiando, nella sua equazione, la variabile x con la variabile y

$$y = 2 - \frac{4e^x}{1+e^x} \text{ diventa } x = 2 - \frac{4e^y}{1+e^y}$$

Per esplicitare la variabile y , risolviamo l'equazione rispetto a $t = e^y$

$$x + tx = 2 + 2t - 4t \rightarrow t(x + 2) = 2 - x \rightarrow t = \frac{2 - x}{x + 2}$$

Da $e^y = \frac{2-x}{x+2}$ si ottiene $y = \ln \frac{2-x}{x+2}$ - equazione della funzione inversa $g(x)$.

Il dominio coincide con l'insieme immagine di $f(x)$: l'intervallo $] -2, 2[$

L'insieme immagine coincide con il dominio di $f(x)$: l'intero asse reale.

Gli asintoti si determinano applicando la stessa simmetria agli asintoti di $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty$$

la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale sinistro. La retta di equazione $x = -2$ è asintoto orizzontale destro.

Il punto $O(0,0)$ è punto unito della trasformazione e centro di simmetria di entrambe le curve.

Grafici

