

Quesito 8

Una persona ha appena assunto una bevanda alcolica. Il suo tasso alcolemico è dato dalla funzione $A(t) = 4(0,5^t - 0,25^t)$, dove t è il tempo (espresso in ore) trascorso dall'assunzione della bevanda e $A(t)$ indica i grammi di alcol per litro di sangue (g/l) rilevabili nel soggetto in questione. Stabilire dopo quanto tempo dall'assunzione della bevanda viene raggiunto il picco massimo di tasso alcolemico. Tenendo conto che il limite di legge del tasso alcolemico per poter guidare un veicolo è di 0,5 g/l, stabilire quando il soggetto considerato potrà mettersi alla guida

Soluzione

Anche se non richiesto, lo studio completo della funzione $A(t)$ e il suo grafico aggiungono ulteriori elementi utili per rispondere alle richieste del problema.

Studio dell'andamento di $A(t) = 4(0,5^t - 0,25^t)$

Funzione continua e derivabile nel suo dominio $t \geq 0$, positiva per $t > 0$.

$$A(0) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4(2^{-t} - 4^{-t}) = 0$$

$$A'(t) = 4(-2^{-t} \cdot \ln 2 + 2^{-2t} \cdot 2 \cdot \ln 2) = 4 \ln 2 (-2^{-t} + 2^{-2t} \cdot 2)$$

$$A''(t) = 4 \ln^2 2 (2^{-t} - 4 \cdot 2^{-2t})$$

Segno della derivata prima

$$4 \ln 2 (-2^{-t} + 2^{-2t} \cdot 2) \geq 0 \quad \text{posto } 2^{-t} = z > 0$$

$$4 \ln 2 (-z + 2z^2) \geq 0 \rightarrow -z + 2z^2 \geq 0 \rightarrow (\text{essendo } z > 0)$$

$$2z - 1 \geq 0 \rightarrow z \geq \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$2^{-t} \geq \frac{1}{2} = 2^{-1} \rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

La funzione $A(t)$ è crescente per $0 \leq t < 1$, decrescente per $t > 1$ e assume valore massimo in $t = 1$.

Il picco massimo di tasso alcolemico viene raggiunto dopo un'ora dall'assunzione della bevanda. Il valore $A_{\max} = A(1) = 1 \text{ (g/l)}$

Segno della derivata seconda

$$4 \ln^2 2 (2^{-t} - 4 \cdot 2^{-2t}) \geq 0 \quad \text{posto } 2^{-t} = z$$

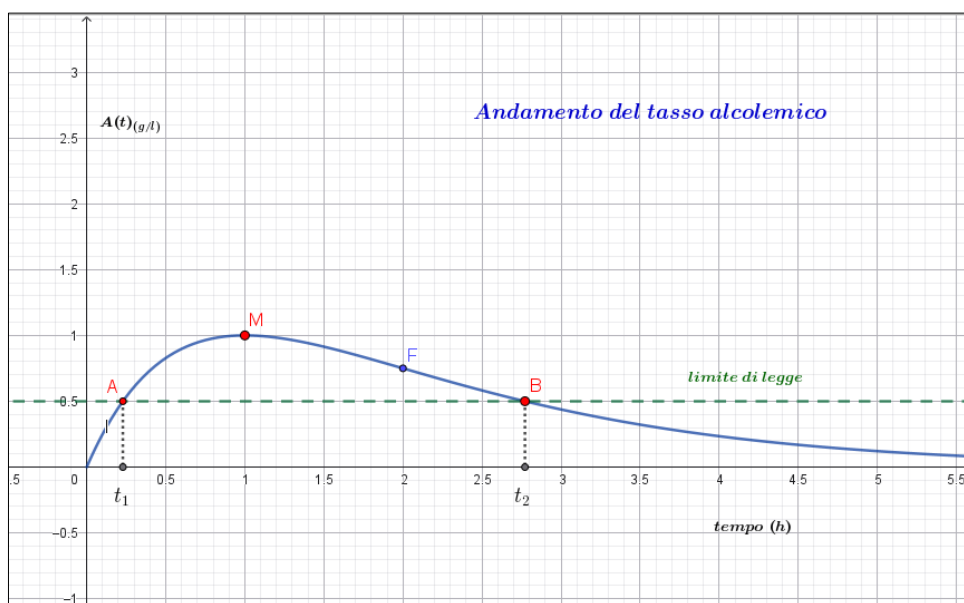
$$z - 4 \cdot z^2 \geq 0 \rightarrow (\text{essendo } z > 0)$$

$$1 - 4 \cdot z \geq 0 \rightarrow z \leq \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$2^{-t} \leq \frac{1}{4} = 2^{-2} \rightarrow t \geq 2$$

La funzione $A(t)$ è convessa per $t > 2$, concava per $t < 2$; presenta un flesso nel punto $F\left(2, \frac{3}{4}\right)$.

Risoluzione grafica del quesito <<stabilire quando il soggetto considerato potrà mettersi alla guida>>



La curva di equazione $y = A(t)$ incontra retta di equazione $y = \frac{1}{2}$ nel punto A di ascissa t_1 e nel punto B di ascissa t_2 , rappresentati in figura.

Il tasso alcolemico raggiunge il *valore limite di legge* nell'istante t_1 nella fase precedente il picco massimo e nell'istante t_2 , nella fase decrescente.

Legalmente, una persona che ha assunto una bevanda alcolica al tempo $t = 0$ potrebbe mettersi alla guida nell'intervallo $0 < t < t_1$ oppure nell'intervallo $t > t_2$, ma il buon senso suggerisce di guidare nella fase in cui il tasso alchemico decresce.

Risoluzione analitica

I due valori t_1 e t_2 sono soluzioni del sistema

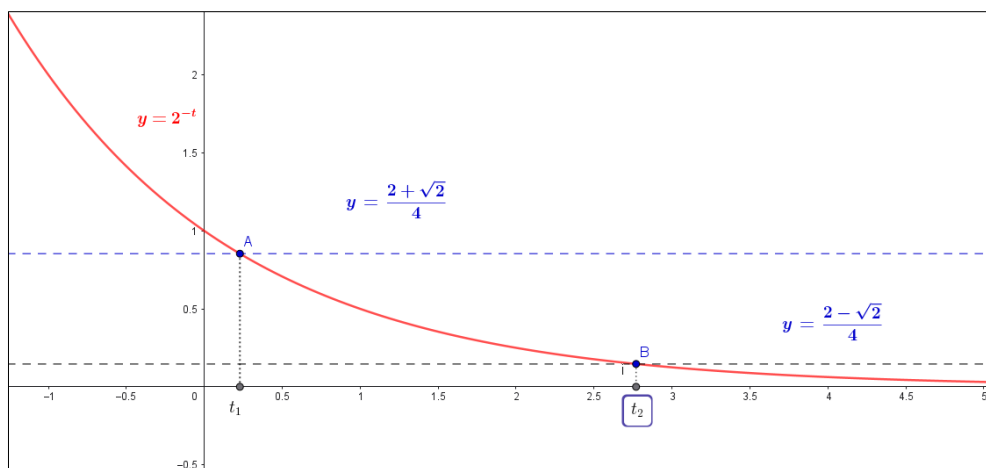
$$\begin{cases} y = 4(2^{-t} - 4^{-t}) \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} = 4(2^{-t} - 2^{-2t})$$

Posto $2^{-t} = z > 0$ si ottiene l'equazione algebrica $\frac{1}{2} = 4(z - z^2) \rightarrow 8z^2 - 8z + 1 = 0$ le radici sono entrambe positive (regola di Cartesio)

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$z_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad z_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Tornando alla variabile t possiamo impostare le due equazioni $2^{-t} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \cup 2^{-t} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, di cui diamo la seguente interpretazione grafica.



$$2^{-t_2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad 2^{-t_1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Se, come già osservato, si suppone che la richiesta del problema si riferisca al valore t_2 ,

è sufficiente risolvere l'equazione $2^{-t} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

Passando ai logaritmi di entrambi i membri

$$-t \ln 2 = \ln(2 - \sqrt{2}) - \ln 4$$

$$t \ln 2 = -\ln(2 - \sqrt{2}) + \ln 4 = \ln \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \ln 4 = \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) + 2 \ln 2 =$$

$$= \ln(2 + \sqrt{2}) - \ln 2 + 2 \ln 2 = \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln 2$$

$$t = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{\ln 2} + 1 \approx 2,77$$

Poiché t è misurato in ore $t_2 = \left(2 + \frac{77}{100}\right) h \approx \left(2 + \frac{46}{60}\right) h$

Il soggetto considerato potrà mettersi alla guida dopo un intervallo di tempo di circa

$$2h 46'$$

dall'assunzione della bevanda alcolica