Abu Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

di Antonino Giambò

1. A partire dal XIII secolo entrano a far parte del linguaggio matematico due nuovi termini, che nella traduzione italiana diventano: *algoritmo* e *algebra*.

Sono collegati alle due opere matematiche dell'arabo Abu Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, noto più semplicemente come **al-Khwārizmī**.

Vedremo più avanti in che modo c'è questo collegamento, quando per l'appunto ci occuperemo della sua vita e delle sue opere. Giacché è esattamente questo l'oggetto del presente articolo: vita ed opere di al-Khwārizmī.

Ho fatto un rapido cenno a questo matematico nell'articolo *Breve storia dell'Algebra*, pubblicato il 9 giugno 2020 su Matmedia. Qui intendo trattarne in modo più approfondito.

2. Cerchiamo per prima cosa di capire in quale ambiente visse ed operò al-Khwārizmī.

Maometto, all'età di circa 40 anni (era nato a La Mecca, nella penisola araba, nel 570), dichiarando di avere avuto una rivelazione divina, si proclamò il *Profeta di Allah* e assunse come missione la predicazione di un unico Dio, Allah per l'appunto, e, su questa base, seppure con fatica, riuscì ad unificare le diverse tribù arabe, che per anni erano state in lotta fra loro, sotto il segno dell'*Islam*, la religione da lui stesso fondata e i seguaci della quale furono chiamati *musulmani*.

In realtà, a La Mecca pochi concittadini si convertirono alla nuova religione. Gli abitanti di quella città si arricchivano, infatti, con il commercio e i pellegrinaggi di popolazioni che adoravano vari idoli. Cosicché le imposizioni di una religione monoteistica, qual era appunto l'Islam, non li favoriva, anzi li danneggiava.

La crescente ostilità dei suoi concittadini, che degenerarono in vere e proprie persecuzioni e uccisioni, costrinse Maometto a fuggire da La Mecca e a rifugiarsi in quella che all'epoca si chiamava Yathrib, ma subito fu denominata *Medina*, vale a dire "la Città del Profeta". Era l'anno 622 dell'era cristiana, anno che sarà detto anno dell'*Egira*, per significare l'esodo di Maometto da La Mecca a Yathrib. Quest'anno segna anche l'inizio del calendario islamico.

A Medina Maometto predicò per otto anni e qui fondò la prima comunità musulmana, la cosiddetta *Umma.*

Da Medina, nel 630, egli mosse con i musulmani alla conquista de La Mecca.

Conquistata la città, i conflitti armati proseguirono con alterne vicende, ma alla fine tutte le tribù della penisola araba furono riunite in un unico popolo sia sul piano politico sia su quello religioso.

Nell'anno 632 Maometto fece ritorno a Medina, dove si ammalò e morì l'8 giugno dello stesso anno.

I successori di Maometto – i califfi Abū Bakr al-Ṣiddīq (dal 632 al 634), Umar ibn al-Khaṭṭāb (dal 634 al 644, quando fu assassinato), Uthmān b. Attān (dal 644 al 656, quando fu assassinato), Alī ibn Abī Talib (dal 656 al 661) – in poco tempo, circa 30 anni, conquistarono un vero e proprio impero, che comprendeva la Persia, la Siria, la Palestina, l'Egitto, il Nord Africa, la Sicilia, parti dell'India e della Cina, la Spagna.

Il loro tentativo di spingersi oltre, alla conquista della Francia, fu vanificato poiché gli Arabi furono fermati e sconfitti dai Franchi di Carlo Martello nella battaglia di Poitiers nel 732. La loro sete di conquiste si placò.

Dopo circa 150 anni di guerre, dunque, gli Arabi, placata appunto la loro sete di conquiste, al tempo del califfato di al-Mansur (in carica dal 754 al 775), intorno all'anno 765, fondarono la città di Baghdad, che fu anche assunta come capitale dell'impero.

Pensarono anche di costruire a Baghdad una grande biblioteca, che fu poi denominata *Bayt al-Ḥikma* (*Casa della Sapienza*). L'opera, iniziata sotto il califfato di Harum al-Rashid (in carica dal 786 all'809), che la voleva come sua biblioteca personale, fu completata e ampliata dal figlio, il califfo al-Mamun (in carica dall'813 all'833), un vero e proprio filantropo, che fece della Casa della Sapienza il più importante centro di studi e ricerche di quell'epoca. Si deve a lui, infatti, se alla biblioteca pervennero numerose opere – letterarie, filosofiche, scientifiche – provenienti da tutte le parti dell'impero e, in particolare, dalla Grecia e dall'India: la Casa della Sapienza divenne l'autentica erede della biblioteca di Alessandria, che, dopo alcune distruzioni parziali,

era stata distrutta completamente nel 641, per ordine del califfo Umar ibn al-Khaṭṭāb. Una leggenda metropolitana racconta che, al generale che gli chiese cosa avrebbe dovuto fare dei libri che essa ospitava, il califfo abbia dato la seguente risposta: «*Se i libri non riportano quanto scritto dal Corano allora vanno distrutti, poiché non dicono il vero. Se riportano quanto scritto dal Corano vanno distrutti ugualmente perché sono inutili*».

Ora, la presenza delle numerose opere, circa 600.000, scritte in varie lingue, che arricchivano appunto la biblioteca di Baghdad, necessitava ovviamente di soggetti che le traducessero in quella lingua araba, che nel frattempo era diventata la lingua ufficiale dell'Islam. E necessitava anche di un responsabile della biblioteca.

Fu così che al-Mamun conferì questo incarico (di responsabile della biblioteca, ma anche di traduttore) al matematico e astronomo Mohammed ibn-Musa al-Khwārizmī.

3. Di al-Khwārizmī, in realtà, non sappiamo molto. Sembra essere vissuto all'incirca fra il 780 e l'850.

Nella figura sottostante (figura 1) è riprodotto un francobollo che l'ex URSS emise nel 1983 per commemorare i 1.200 anni dalla sua nascita, ipotizzando che egli fosse nato nel 783, cosa possibile ma non sicura.



figura 1 – al-Khwārizmī

Il suo nome – Mohammed ibn-Mūsā al- Khwārizmī – significa letteralmente "Maometto, figlio di Musa, originario della regione del Khwārizm" (o Chorasmia, nell'attuale Uzbekistan). Sulla regione di provenienza, in verità, non tutti gli storici concordano. Qualcuno sostiene infatti che, se è vero che i suoi antenati provenissero da quella regione, egli era nato invece in una località vicino a Baghdad.

Ad ogni modo al-Khwārizmī, una volta ottenuto l'incarico di responsabile della Casa della Sapienza, trascorse quasi il resto della sua vita nella biblioteca di Baghdad e sotto la sua direzione furono tradotti in arabo, fra l'altro, le principali opere greche di matematica, ed in particolare gli *Elementi* di Euclide.

Ma mentre la traduzione degli *Elementi* fu fatta da uno dei più importanti traduttori operanti nella Casa della Sapienza, Hunay ibn Ishaq (809-873), ad al-Khwārizmī toccò la traduzione di un'importante opera di origini indiane, probabilmente il *Brāhmasphuṭa siddhānta* del matematico indiano Brahmagupta (628). L'opera, nota agli arabi col nome di *Sindhind*, era stata portata a Baghdad nel 766 ed era già stata tradotta in arabo verso l'anno 775, ma la versione realizzata per la Casa della Sapienza fu opera di al-Khwārizmī e fu una traduzione d'importanza fondamentale per lo sviluppo della scienza nel mondo islamico.

In quest'opera, tra le altre cose, è presente il sistema di numerazione decimale posizionale, compreso un puntino pieno nero per rappresentare lo zero. E possiamo immaginare lo stupore di al-Khwārizmī quando si rese conto che con 10 piccoli simboli era possibile scrivere ogni numero.

Fu molto probabilmente proprio il *Brāhmasphuṭa siddhānta* ad indirizzare al-Khwārizmī verso la stesura di alcune opere, per lo più di genere astronomico. Ma due libri, a contenuto matematico, ci interessano particolarmente: il primo libro è un testo sul calcolo con i numeri indiani, il secondo si occupa della risoluzione delle equazioni algebriche di 1° e 2° grado.

Questo due opere avrebbero svolto un ruolo fondamentale nella rinascita della Matematica nell'Europa a partire dal XIII secolo.

4. Dedichiamo qualche rigo alla prima delle due suddette opere, scritta quasi certamente per scopi didattici, al fine di evidenziare quali influssi ebbe sul progresso della Matematica in Occidente.

L'originale di questo libro in lingua araba è andato perduto, per cui non se ne conosce il titolo nella formulazione araba. Titolo che, secondo qualcuno [6], potrebbe essere *Kitāb al-Jamʿ wa al-tafrīq bi-ḥisāb al-Hind* (*Libro sull'addizione e la sottrazione secondo il sistema di calcolo indiano*).

Il libro ci è pervenuto comunque in una traduzione latina del XII sec., attribuita al filosofo, matematico e astrologo britannico Adelardo di Bath (ca. 1080 – ca. 1152) col titolo *Algorithmi de numero Indorum* (*Intorno al numero degli Indiani di al- Khwārizmī*).

Questa traduzione introduceva nel linguaggio matematico il termine ***algoritmo***. Il termine, in origine, era riferito semplicemente al nome dell'autore dell'opera, al-Khwārizmī per l'appunto, ma che via via col passare degli anni passò, dal significare uno schema di numerazione basato sulle cifre indiane, al significato odierno di insieme di regole di calcolo con caratteristiche determinate.

L'opera fece conoscere nel mondo occidentale il sistema di numerazione decimale posizionale degli Indiani, sistema che oggigiorno denominiamo indo-arabo: indiano, perché il principio base del sistema è quello ereditato dagli Indiani; arabo, giacché le cifre che usiamo sembrano derivare da quelle arabe anche se non assomigliano molto a quelle in uso negli antichi paesi arabi. [1] Tra queste cifre compare anche lo "zero", che al-Khwārizmī rappresenta con un cerchietto, esattamente (o quasi) come facciamo noi.

Altre opere contribuirono alla diffusione delle cifre indo-arabe in Europa ed una di esse in maniera determinante, soprattutto nei commerci: il *Liber abaci*, opera del matematico pisano Leonardo Fibonacci (vissuto tra la fine del XII secolo e la prima metà del XIII).

Fibonacci, durante i suoi numerosi viaggi, effettuati in qualità di mercante anche in paesi che all'epoca si trovavano sotto la dominazione araba (Egitto, Siria, Grecia, Sicilia, Provenza), conobbe e assimilò la matematica degli Arabi e, in particolare, i trattati di al-Khwārizmī. Elaborò le conoscenze acquisite in maniera personale e originale e scrisse alcune opere, tra cui per l'appunto il *Liber abaci*, che fu completato nel 1202 e riscritto nel 1228.

L'opera comprende, fra le molte cose significative, una descrizione accurata del sistema di numerazione indo-arabo e fornisce le regole per eseguire le operazioni aritmetiche.

Nel libro figura la parola *zephirum*, che Fibonacci usa per tradurre il temine arabo *sifr*, che a sua volta è la traduzione araba della parola indiana *sunya* e che significa "vuoto". Da questa parola discendono, con adattamenti successivi, gli odierni termini italiani *zero* e *cifra*.

Il *Liber abaci*, come già detto, svolse un ruolo determinante per la divulgazione del sistema di numerazione indo-araba in Europa, in particolare nei commerci. Occorre precisare, tuttavia, che l'introduzione del nuovo sistema di numerazione non trovò all'inizio favorevole accoglienza nel pubblico, abituato com'era a servirsi della numerazione romana. Ci volle del tempo prima che il nuovo sistema fosse accettato in modo esteso e alla sua divulgazione contribuirono, in maniera più rilevante del *Liber abaci*, due altre opere, certamente meno importanti dell'opera di Fibonacci, ma a quell'epoca più popolari proprio perché più elementari: il *Carmen de algorismo* di un frate francescano francese, Alexandre de Villedieu (attivo intorno al 1225), e l'*Algorismus vulgaris* di Giovanni Sacrobosco (vissuto all'incirca tra il 1200 e il 1256), inglese originario di Halifax.

Questi due libri costituirono addirittura una base di studio presso le prime università europee.

L'uso delle cifre indo-arabe si può dire che fu adottato in Europa su larga scala a partire dal 1494, anno in cui comparve una delle prime opere matematiche pubblicate a mezzo stampa: la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* del frate francescano Luca Pacioli (1445 – ca. 1515) [2].

La pubblicazione del libro a mezzo stampa permise di averne molte copie e, di conseguenza, consentì un'ampia diffusione, cosa che non poteva verificarsi con le opere precedenti che erano manoscritte e quindi usufruibili in poche copie.

---

[1] Ricordo che anche in Cina, esattamente nelle civiltà fiorite addirittura in età pre-cristiana lungo le rive del fiume Yangtze e del fiume Giallo, era usato un sistema di numerazione decimale posizionale, ma con simboli diversi da quelli indiani. Ne ho trattato in un precedente articolo.

[2] Per una conoscenza più approfondita dell'opera di Pacioli rinvio ad un mio articolo pubblicato su Matmedia il 30 giugno 2025.

Altre opere, al di fuori dell'Italia, contribuirono all'affermazione del sistema di numerazione indo-arabo, che in Europa fu adottato definitivamente a partire dal XVI secolo.

5. Il secondo libro matematico di al-Khwārizmī, la sua opera più importante, ha per titolo *Al-Kitāh al Mukhtasar fi Hisāb al-Jabr wa'l Muqābalah*, che si traduce in *Il libro conciso del calcolo per trasporto e soppressione*, ma che nella versione latina di Roberto di Chester (1145) diventò *Liber algebrae et almucabala*. È un vero e proprio manuale di algebra e proprio da tale libro deriva la parola ***algebra***, come oggi la intendiamo.

In realtà, non si conosce l'esatto significato dei termini "al-jabr" e "al-muqābalah". Pare che significhino appunto "trasporto" e "soppressione". Vale a dire trasporto di un termine da un membro all'altro dell'equazione ovviamente con segno cambiato e soppressione di termini opposti nello stesso membro (di un'equazione) o di termini uguali in due membri diversi.

Ma gli stessi termini, per altre traduzioni, significano rispettivamente "trasporto" e "riduzione" [4, pag.143] oppure "restaurazione" e "opposizione" [1, pag. 54] o ancora "aggiustamento" e "confronto" [3, pag. 242] oppure "completamento" e "semplificazione" [6]. Ma il concetto è sempre stesso, quello espresso sopra.

In quest'opera l'autore espone dapprima, in maniera meticolosa, tutte le operazioni che bisogna eseguire per giungere alla soluzione di un'equazione di 1° o di 2° grado. Successivamente spiega con considerazioni di natura geometrica, la validità del procedimento. E, cosa non di secondaria importanza, è la prima volta che una spiegazione siffatta viene fornita.

Al-Khwarizmi non dispone di alcun simbolismo, per cui è costretto ad esporre le sue considerazioni e i suoi ragionamenti con le parole del linguaggio comune. La sua è appunto un'algebra *retorica*.

Ci occuperemo fra breve di descrivere qualche risultato da lui ottenuto riguardo alla risoluzione delle equazioni di 2° grado.

Ma prima è necessario fornire alcune indicazioni.

Al-Khwārizmī considera tre classi di oggetti numerici: *radici*, *quadrati*, *numeri*. Basa quindi la risoluzione di un primo gruppo di equazioni riducendoli ad uno dei seguenti tipi (in parentesi, dove p, q sono numeri interi positivi, il nostro modo di scrivere l'equazione):

- quadrato uguale a radice ($x^2 = p\,x$),
- quadrato uguale a un numero ($x^2 = q$),
- radice uguale a un numero ($p\,x = q$).

Successivamente affronta la risoluzione di equazioni di 2° grado riconducibili ai seguenti tipi:

- quadrato più radice uguale a un numero ($x^2 + p\,x = q$),
- quadrato più numero uguale radice ($x^2 + q = p\,x$),
- radice più numero uguale quadrato ($p\,x + q = x^2$).

Quando le equazioni, sia del primo che del secondo gruppo, non hanno 1 come coefficiente di x^2, in via preliminare questo coefficiente è ridotto a 1, dividendo per esso entrambi i membri dell'equazione.

6. Adesso, giustappunto per comprendere come al-Khwārizmī dimostri la correttezza delle soluzioni delle equazioni, forniamo un esempio per ciascuna delle equazioni del secondo gruppo.

Precisiamo che la soluzione di ogni equazione, espressa a parole, non differisce da quella di Brahmagupta. La soluzione inoltre è riferita ad una specifica equazione, anche se s'intuisce che il procedimento funziona in ogni altro caso.

- Equazione $x^2 + p\,x = q$.

L'equazione (particolare) proposta da al-Khwarizmi risolve il seguente problema:

Quale quadrato più dieci radici è uguale a trentanove?

Nel nostro simbolismo la traccia si traduce nella seguente equazione:

$$x^2 + 10\,x = 39\,.$$

Al-Khwārizmī, che, lo ribadisco, non dispone di alcun simbolismo, espone a parole i vari passaggi da eseguire per ottenere la soluzione. Ecco dunque la soluzione [4, pag. 150]:

La soluzione è la seguente: dimezza (il numero del) *le radici, che nel presente caso diventano cinque. Moltiplica queste per se stesse, il prodotto è venticinque; aggiungi questo a 39 e la somma è sessantaquattro. Ora di questo* (64) *prendi la radice* (quadrata) *che è otto e sottrai a questa la metà, cinque, delle radici. Rimane tre che è la radice del quadrato* (cercato)*. E il quadrato è 9*.

Il procedimento descritto si può sintetizzare nella seguente formula (si prende la sola soluzione positiva, poiché al-Khwārizmī riconosce solo i numeri positivi, interi o frazionari):

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 3\,.$$

Successivamente al-Khwārizmī spiega, con considerazioni di natura geometrica, la validità del procedimento. È esattamente su questa spiegazione che adesso fermiamo la nostra attenzione. Lo facciamo servendoci del nostro linguaggio, sia retorico sia simbolico, ma la sostanza non cambia.

Si costruisce dapprima un quadrato di lato sconosciuto, che indichiamo con x (figura 2); la sua area è naturalmente x^2.



figura 2

A questo quadrato bisogna sommare $10\,x$ per ottenere il primo membro dell'equazione. Ora, $10\,x$ si può concepire come l'area di un rettangolo di lati 10 e x. D'altro canto, questo rettangolo è equivalente alla somma di 4 rettangoli aventi lati x e $10/4$. Ebbene, questi 4 rettangoli sono disposti lungo i quattro lati del quadrato (figura 3). E la nuova figura ha comunque area $x^2+10\,x$.

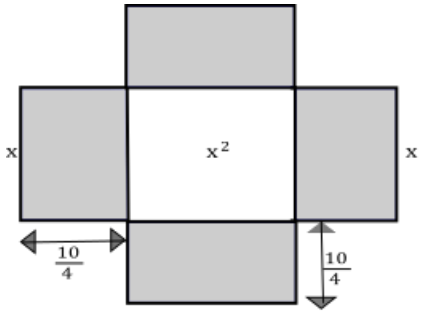


figura 3

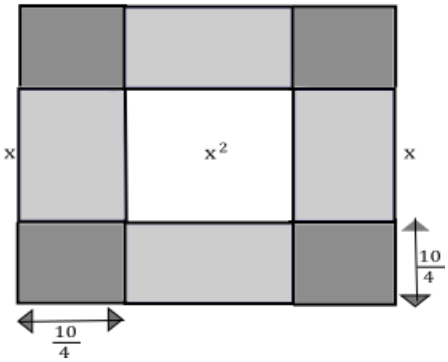


figura 4

Infine la figura viene completata con quattro quadratini, tutti di lato $10/4$, disposti nei quattro angoli della figura stessa. Si ottiene, in questo modo, un quadrato (figura 4) di area:

$$(x^2 + 10\,x) + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = (x^2 + 10\,x) + 25 = 39 + 25 = 64\,.$$

Il lato di questo quadrato è perciò 8. Di conseguenza, il lato del quadrato originario è:

$$x = 8 - 2 \cdot \frac{10}{4} = 3\,.$$

E il quadrato di 3 è 9. È la soluzione del problema assegnato.

Si può costatare, riflettendo sul procedimento di al-Khwārizmī, che la risoluzione dell'equazione implica la costruzione geometrica di un idoneo quadrato, quello di figura 4.

In realtà, anche il procedimento di risoluzione algebrica per calcolare x, che potremmo seguire oggigiorno se non volessimo usufruire della nota formula risolutiva, implica la costruzione di un quadrato. Infatti, riprendendo l'equazione precedente, possiamo scrivere in successione:

$$x^2+10x=39,\quad x^2+10x+25=39+25,\quad (x+5)^2=64,\quad x+5=8,\quad x=3.$$

Naturalmente ci siamo soffermati sulla sola radice positiva, come avrebbe fatto al-Khwārizmī.

Per la cronaca, al-Khwārizmī propone una dimostrazione alternativa, sempre geometrica. Non ce ne occupiamo. Ma chi avesse voglia di conoscerla può consultare [4] o [1].

- Equazione $x^2 + q = p\,x$.

Si risolve l'equazione:

$$x^2 +21= 10\,x\ .$$

Anche adesso l'equazione è la traduzione di un semplice problema:

Qual è il quadrato che quando si somma a ventuno dà luogo a dieci delle radici di detto quadrato?

Come nell'altro caso, al-Khwārizmī espone a parole la soluzione. Omettiamo questa esposizione e ci limiamo a fornire "una" soluzione che traduce nel nostro linguaggio simbolico l'esposizione di al-Khwārizmī:

$$x = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 - \sqrt{4} = 3\,.$$

Si ottiene così il lato del quadrato, 3 appunto. La sua area è dunque 9.

In questo caso, al-Khwārizmī fa altre interessanti considerazioni in aggiunta alle sue precedenti, precisamente [4, pag. 154]: *oppure, puoi sommare la radice* (quadrata) *alla metà delle radici: la somma è 7; questa è la radice del quadrato che hai cercato e il quadrato stesso è 49*.

In altre parole, è come se al-Khwārizmī utilizzasse la seguente formula risolutiva:

$$x = \frac{10}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases}.$$

Ma occupiamoci della spiegazione geometrica.

Anche adesso al-Khwārizmī parte da un quadrato di lato incognito x e quindi di area x^2. Aggancia a questo quadrato un rettangolo di area 21, avente un lato uguale ad x: si forma un rettangolo di area $x^2 +21$. Essendo poi, in base all'equazione, $x^2 +21=10\,x$, questo rettangolo ha evidentemente base 10 e altezza x.

Al-Khwārizmī lo divide a metà con una corda parallela al lato x del rettangolo, venendo così a scomporre il rettangolo di base 10 e altezza x in tre parti, una delle quali è il quadrato originario e le altre due, A_1 e A_2, sono rettangoli aventi entrambi la stessa altezza x e basi rispettivamente 5 e 5−x (figura 5).

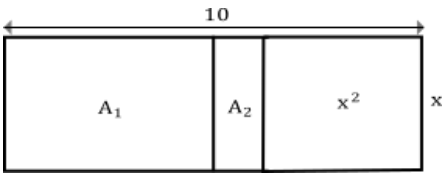


figura 5

Sul rettangolo A_1, nella parte superiore, al-Khwārizmī riporta un rettangolo A_3 uguale ad A_2 e, al fine di ottenere un quadrato di lato 5, completa la figura con un quadratino di lato 5−x (figura 6).

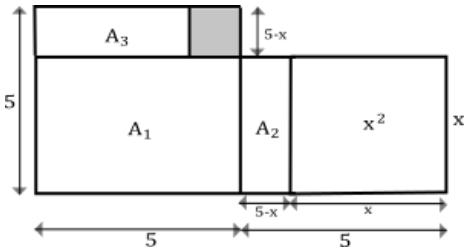


figura 6

Se ammettiamo che le A_k siano aree, possiamo costatare che si ha:

$$5^2 - (A_1 + A_3) = (5 - x)^2.$$

D'altra parte, siccome $A_1+A_3=A_1+A_2=21$, risulta:

$5^2 - 21 = (5 - x)^2$, vale a dire: $(5 - x)^2 = 4$ e quindi: $5 - x = 2$ e infine $x = 3$.

Il quadrato cercato ha area 9.

Come abbiamo detto prima, al-Khwārizmī trova anche la soluzione x=7, cui corrisponde il quadrato di area 49.

Egli richiama anche l'attenzione sul fatto che quello che noi chiamiamo discriminante (nel caso specifico 5^2-21) deve essere positivo.

Anche per questa equazione il procedimento di risoluzione algebrica per determinare x, posto che non si faccia ricorso alla formula risolvente, implica la costruzione di un quadrato. Si ha infatti in successione:

$x^2 +21= 10\,x,\ (x^2 +21)+(4-10\,x)= 10\,x+(4-10\,x),\ x^2-10\,x+25=4,\ (x-5)^2=4,\ x-5=\mp 2,\ x=\begin{cases}3\\7\end{cases}$.

- Equazione $p\,x + q = x^2$.

Si risolve l'equazione:

$$3\,x + 4 = x^2.$$

La soluzione, che traduce in simboli l'esposizione di al- Khwārizmī è la seguente:

$$x = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{3}{2} = 4\,.$$

Passiamo alla spiegazione geometrica fornita da al-Khwārizmī, esposta sempre nel nostro linguaggio.

Si parte sempre da un quadrato di lato incognito x (figura 7). Per mezzo di una corda parallela ad uno dei suoi lati questo quadrato è suddiviso in due rettangoli, aventi la stessa base x e aree rispettivamente 3x e 4. Di modo che risulta $3x+4=x^2$, come da equazione.

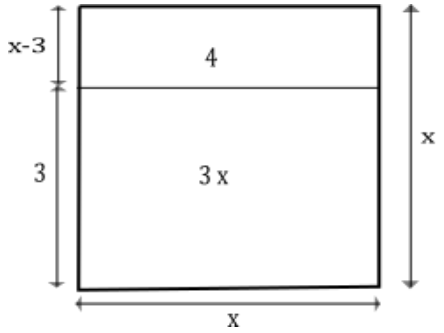


figura 7

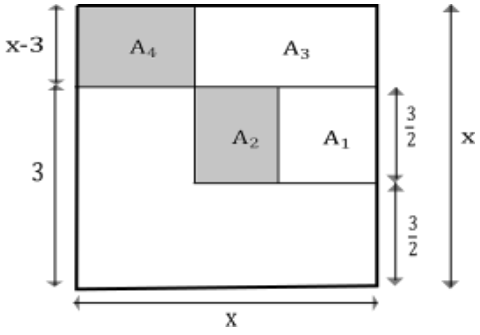


figura 8

A questo punto, dopo aver dimezzato l'altezza 3 del rettangolo di area 3x, si costruisce su un segmento lungo $\frac{3}{2}$ il quadrato A_1, la cui area è evidentemente $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Si costruisce quindi un secondo quadrato, di lato $\frac{3}{2}+(x-3)$, formato dalle figure A_1, A_2, A_3 (figura 8).

Indicata ora con A_4 la figura che, sommata alla figura A_3, forma il rettangolo di area 4, si ha ovviamente: $A_3+A_4=4$.

Osserviamo adesso che le dimensioni del rettangolo A_2 sono:

$$\frac{3}{2} \text{ e } \left[\frac{3}{2} + (x - 3)\right] - \frac{3}{2} = x - 3\,.$$

E che le dimensioni del rettangolo A_4 sono:

$$x - 3 \text{ e } x - \left[\frac{3}{2} + (x - 3)\right] = \frac{3}{2}.$$

Come dire che i due rettangoli A_2, A_4 sono uguali. Per cui: $A_2+A_3=A_4+A_3$.

Supponendo allora che le A_k siano aree, ricordando che $A_3+A_4=4$, risulta:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + (A_3 + A_4) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\,.$$

Il lato del quadrato formato dalle figure A_1, A_2, A_3 è di conseguenza:

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}$$

e il lato cercato x è perciò:

$$x = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + \frac{3}{2} = 4\,.$$

Il quadrato da determinare ha chiaramente area 16.

Ancora una volta, come è richiesta la costruzione di un idoneo quadrato nella dimostrazione geometrica, così anche la risoluzione algebrica per calcolare x comporta la costruzione di un quadrato. Si ha infatti in successione:

$$3x + 4 = x^2,\ \ (3x + 4) + \left(\frac{9}{4} - 3x\right) = x^2 + \left(\frac{9}{4} - 3x\right),\ \ \frac{25}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2,\ \ x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2},\ \ x = 4.$$

7. Alcune considerazioni conclusive.

- Sulle costruzioni geometriche che avrebbero influenzato al-Khwarizmi ci sono opinioni contrastanti fra gli storici.

Non c'è dubbio che le dimostrazioni di al-Khwārizmī facciano pensare in molti punti alla geometria greca, ma da qui a concludere, come fa Luis Fernando Areán [1, pag. 110] che «la base di tutte le dimostrazioni» del Nostro furono gli *Elementi* di Euclide, ce ne corre

Silvio Maracchia, per esempio, non condivide questo pensiero. Egli, infatti, si sente di «poter escludere che alcune delle costruzioni geometriche di al-Khwārizmī siano state influenzate dagli *Elementi* di Euclide» [4, pag. 147].

Mi si consenta di esprimere al riguardo il mio modestissimo parere.

Nel II libro degli *Elementi* c'è, in realtà, solamente una figura che assomiglia alle costruzioni di al-Khwārizmī, precisamente a quella figura che spiega la risoluzione dell'equazione $x^2+21=10x$ ed è esattamente lo *gnomone*. Ma sono disposto a credere che al-Khwārizmī non avesse bisogno di appoggiarsi allo gnomone per le sue costruzioni: basta riflettere sulla portata delle sue dimostrazioni.

C'è invece, negli *Elementi*, molta somiglianza con le cosiddette "regole di calcolo" formulate da al-Khwārizmī nella stessa opera. Regole che, nel nostro linguaggio simbolico, possiamo così esprimere [1, pag. 117]:

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd\,,$$
$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd\,,$$
$$(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd\,.$$

Ma queste regole ben poco hanno a che fare con le costruzioni geometriche che al-Khwārizmī propone per dimostrare la validità delle soluzioni delle equazioni.

Tutto ciò per concludere che, a mio modesto parere, per quello che vale, è più plausibile la tesi di Maracchia che quella di Areán.

C'è, tuttavia, un problema nell'Algebra di al-Khwārizmī, che fa ritenere seriamente che egli possa essersi ispirato ad un'opera impropriamente attribuita ad Erone di Alessandria (I sec. d.C.).

Di fatto, il problema proposto da al-Khwārizmī, la figura e i dati assegnati sono proprio uguali (a parte un irrilevante dettaglio) a quelli di un analogo problema di Erone. Ma diversi sono i procedimenti per risolvere il problema.

Questo è il problema:

È dato un triangolo isoscele, la cui base e il cui lato misurano rispettivamente 12 e 10 (in Erone sono dati la base uguale a 12 e l'altezza uguale a 8).

Si chiede di inscrivere nel triangolo un quadrato avente un lato sulla sua base.

Mettiamo a confronto il procedimento di Erone con quello di al-Khwārizmī, servendoci naturalmente del nostro linguaggio simbolico.

Ci riferiamo alla figura sottostante (figura 9), che è quella stessa che utilizzano sia Erone sia al-Khwārizmī, se si esclude il modo di indicare i vertici e le misure dei segmenti interessati.

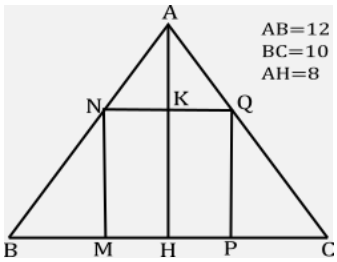


figura 9

Procedimento di Erone.	Procedimento di al-Khwārizmī.
Senza fornire spiegazioni, Erone conclude che la misura x del lato del quadrato è la seguente: $$x = \frac{12 \times 8}{12 + 8} = \frac{24}{5}.$$ Possiamo ipotizzare che egli abbia fatto ricorso alla similitudine dei triangoli AKN e AHB, ottenendo la seguente proporzione: $$AK : AH = KN : HB;$$ e, di conseguenza: $$(8 - x) : 8 = \frac{x}{2} : 6;$$ da cui si ottiene, appunto: $$x = \frac{12 \times 8}{12 + 8} = \frac{24}{5}.$$ Ma non c'è certezza di questo procedimento.	Indicata con x la misura del lato del quadrato, la sua area è x^2, mentre le aree dei tre triangolini ANQ, NBM, QPC sono nell'ordine: $$\frac{1}{2}x \cdot (8 - x),\ \frac{1}{2}x \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right),\ \frac{1}{2}x \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right).$$ La somma delle aree del quadrato e dei tre triangolini è evidentemente uguale all'area del triangolo ABC, che è 48. Pertanto si ha la seguente equazione: $$x^2 + \frac{1}{2}x \cdot (8 - x) + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right) = 48,$$ da cui segue: $$10\,x = 48$$ e perciò: $$x = \frac{24}{5}.$$

- Esaminando l'opera di al-Khwārizmī, ci si rende conto facilmente che egli, più di Diofanto (matematico alessandrino vissuto nel II-III sec. d.C.), meriti l'appellativo di "padre dell'algebra", titolo che a volte è attribuito proprio a Diofanto.

Ecco cosa scrive, riguardo all'Algebra di al-Khwārizmī, lo scrittore Denis Guedj [3, pag. 241]: «*Questo libro è uno dei più celebri che esistano nella storia della matematica. In queste pagine viene fondata una nuova disciplina del tutto originale: l'algebra*».

- Dopo al-Khwārizmī, il testimone, riguardo allo studio delle equazioni di 2° grado, almeno in Europa, passò a Fibonacci, che ne trattò ampiamente nel *Liber abaci*, e successivamente ad altri studiosi fino a giungere alla modalità di risoluzione che ci è familiare.

Per una panoramica sui manuali di algebra rinvio alla lettura dell'articolo *I grandi manuali di Algebra* che Emilio Ambrisi ha pubblicato su Matmedia il 28 agosto 2024.

Qui ni limito a segnalare quelle che, a mio giudizio, sono le due tappe fondamentali che hanno portato alla stesura di quell'opera che sarebbe servita da modello per testi di algebra posteriori, l'opera *Vollständige Anleitung zur Algebra* (*Guida completa all'Algebra*) che Eulero, dopo averla scritta in russo, pubblicò in tedesco nel 1771.

La prima tappa fondamentale è, secondo me, la pubblicazione nel 1637 del *Discours de la méthode* (*Discorso sul metodo*) di Cartesio: con la terza appendice di quest'opera – la *Géométrie* – l'*algebra simbolica*, dopo vari tentativi di studiosi precedenti, trova finalmente la sua consacrazione.

La seconda tappa è l'accettazione dei numeri negativi e delle radici negative di un'equazione: questo avvenne attraverso una serie di lezioni tenute da Newton all'Università di Cambridge nel decennio 1673-1683 e pubblicate nel 1707 in un volume dal titolo *Arithmetica universalis*.

L'*Algebra* di Eulero si occupa di calcolo e di equazioni e delle stesse cose si occupano i testi che, nei 100 anni successivi, ebbero comunque il merito di perfezionare sia il linguaggio dell'Algebra sia il simbolismo.

Ci furono pure dei matematici che allargarono il discorso sulle equazioni algebriche e, per certi versi, lo completarono. Mi riferisco, in particolare, agli algebristi bolognesi del Cinquecento (equazioni di 3° e 4° grado), a Gauss (legittimazione dei numeri complessi), a Ruffini e Abel (impossibilità di risolvere per radicali un'equazione di grado superiore al quarto).

Ad un certo punto però irruppe sulla scena matematica un giovane geniale, Èvariste Galois. Dopo di lui l'Algebra continuò, sì, ad occuparsi di calcolo ed equazioni, ma egli, introducendo concetti e procedimenti del tutto originali, diede l'avvio ad un'Algebra molto diversa da quella classica. Me ne sono occupato in un precedente articolo, al quale rimando chi volesse saperne di più.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Luis Fernando Areán, *La nascita dell'algebra: Al Khwārizmī*, traduzione italiana di Claudia Scienza, Milano, RBA Italia, 2017.

[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, traduzione italiana di Adriano Carugo, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980, pagg. 264-274.

[3] Denis Guedj, *Il teorema del pappagallo*, traduzione italiana di Lidia Perria, Milano, Longanesi & C:, 2000, pagg. 227-257.

[4] Silvio Maracchia, *Storia dell'algebra*, Napoli, Liguori Editore, 2005, pagg. 143-158.

[5] sito web matematicagratuitaperscuolesuperiori, Integrazione 1, Unità 28-88, Cap. 1, n° 1.5.

[6] Wikipedia, libera enciclopedia online.