## Punto a

Considerato il triangolo equilatero ABC, chiamare:

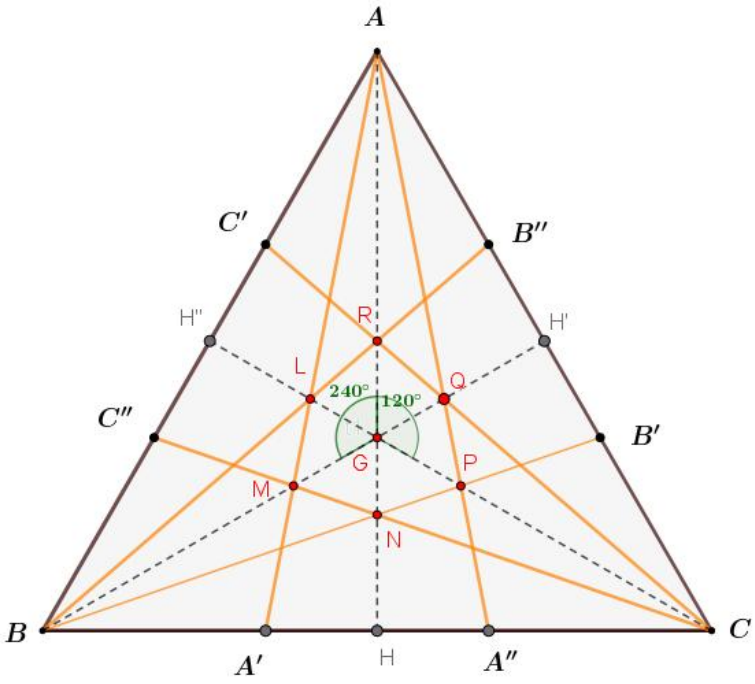
- $C'$, $C"$ i punti che dividono il lato $AB$ in tre parti congruenti ($AC' < AC"$);
- $A', A"$ i punti che dividono il lato $BC$ in tre parti congruenti ($BA' < BA"$);
- $B'$, $B"$ i punti che dividono il lato $CA$ in tre parti congruenti ($CB' < CB"$).

Indicare quindi con:

- $L$ il punto intersezione dei segmenti $AA'$ e $BB"$;
- $M$ il punto intersezione dei segmenti $AA'$ e $CC"$
- N il punto intersezione dei segmenti $BB'$ e $CC"$
- $P$ il punto intersezione dei segmenti $BB'$ e $AA"$
- $Q$ il punto intersezione dei segmenti $CC'$ e $AA"$
- $R$ il punto intersezione dei segmenti $CC'$ e $BB"$

a) Dimostrare, con il metodo che si preferisce, che l'area dell'esagono $LMNPQR$ è $1/10$ di quella del triangolo $ABC$.

## Soluzione




Sia $ABC$ un triangolo equilatero , $AH$ l'altezza relativa al lato $BC$, il punto $G$ il suo baricentro

Diviso il lato $BC$ in tre parti congruenti $BA', A'A'', A''C$, si congiunge il vertice $A$ con il punto $A'$ e con il punto $A''$.

Il triangolo $ACB$ risulta suddiviso in tre triangoli : $ABA'$, $A\,A'A''$, $AA''C$.
Considerazioni analoghe valgono nelle suddivisioni del triangolo rispetto alla base $AB$ e alla base $AC$, rispettivamente .

Osserviamo che:

- il triangolo $AA'A''$ ha due lati uguali, simmetrici rispetto all'altezza $AH$ del triangolo $ABC$
- i due triangoli $ABA'$ e $AA''C$ sono tra loro congruenti e simmetrici rispetto alla stessa altezza $AH$
- triangoli $CC''C'$ e $BB''B'$ sono i corrispondenti di $AA'A''$ nella rotazione di centro $G$ ( in senso antiorario) di $120°$ e di $240°$, rispettivamente

**Ricordando che il gruppo delle isometrie che mutano in sé un triangolo equilatero è isomorfo al gruppo $S_3$ delle permutazioni di 3 oggetti ( i 3 vertici) ed è costituito da 6 elementi**

- l'identità
- le 3 simmetrie rispetto alle rette delle 3 altezze
- 2 rotazioni di centro $G$ e ampiezza $120°$ e $240°$, rispettivamente

possiamo affermare che

**le 6 isometrie del triangolo $ABC$ sono rispettate dalla costruzione effettuata e sono ereditate dall'esagono** $LMNPQR$.

*E' possibile pertanto studiare le proprietà delle figure appartenenti al semipiano che giace in uno dei semipiani delimitati dalla retta AH ed estenderle nell'altro semipiano, oppure limitarsi alla zona interna a un settore di* $120°$*, ad esempio AGB ed estenderla agli altri.*

**Proprietà dell'esagono $LMNPQR$**

- **I 6 vertici si dividono in 3 coppie di punti appartenenti alla medesima altezza di $ABC$**

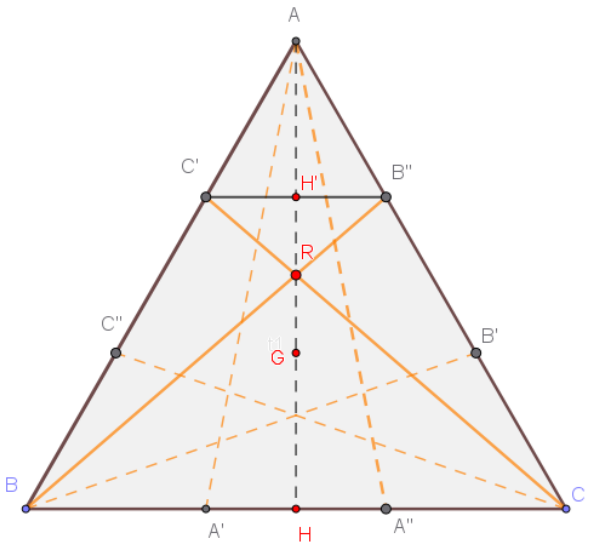
Consideriamo, ad esempio, il punto $R$ e il punto $N$:

essendo entrambi intersezione di due ceviane simmetriche rispetto all'altezza $AH$, giacciono sull'altezza stessa.

Lo stesso accade per la coppia $L, P$ e per la coppia $M, Q$.

**Il punto R coincide con il punto medio dell'altezza $AH$**

*Dalla similitudine dei triangoli ABC e AC'B'' si deduce che* $\overline{C'B''} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ *e* $\overline{AH'} = \frac{1}{3}\overline{AH}$




*Dalla similitudine dei triangoli* $BCR$ *e* $C'B''R$ *si deduce che* $\overline{RH'} = \frac{1}{3}\overline{RH}$

*Essendo* $\overline{AH'} + \overline{H'R} + \overline{RH} = \overline{AH} \rightarrow$

$$\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AH}} + \frac{1}{3}\overline{\mathrm{RH}} + \overline{\mathrm{RH}} = \overline{\mathrm{AH}} \rightarrow \frac{4}{3}\overline{\mathrm{RH}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{AH}}$$

$$\rightarrow \mathbf{\overline{RH} = \frac{1}{2}\overline{AH}}$$

- **L'esagono non è regolare :è equilatero ma non equiangolo**

**I 6 lati dell'esagono sono tra loro congruenti**

Le coppie di lati aventi un vertice in comune sono simmetriche rispetto all'altezza di ABC che passa per quel vertice

$$\mathrm{LR} \equiv \mathrm{RQ} \equiv \mathrm{QP} \equiv \mathrm{PN} \equiv \mathrm{NM} \equiv \mathrm{ML}$$

**Gli angoli si suddividono in due terne di angoli tra loro congruenti**

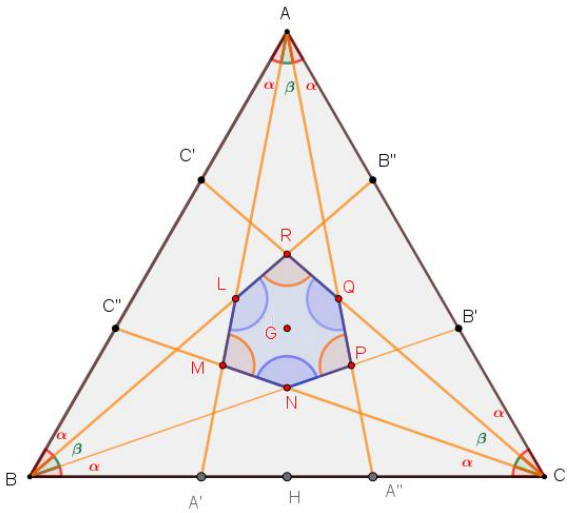
Osserviamo che

$$\hat{L} \equiv \hat{N} \equiv \hat{Q} \qquad \hat{M} \equiv \hat{P} \equiv \hat{R}$$

in quanto si corrispondono in una rotazione di 120° o 240°.

Non esiste invece una trasformazione del gruppo $S_3$ che porta un angolo a sovrapporsi a quello consecutivo.

**Una verifica diretta**



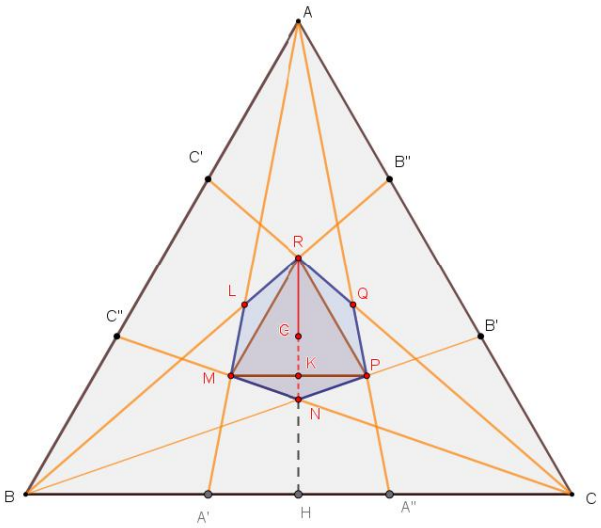

Con riferimento alla figura a lato:

l'angolo $L\hat{R}Q$ fa parte degli angoli interni del triangolo $BRC$, pertanto

$$L\hat{R}Q \equiv Q\hat{P}N \equiv N\hat{M}L = \pi - 2(\alpha + \beta)$$

L'angolo $P\hat{N}M$ è opposto al vertice dell'angolo $B\hat{N}C$ il quale fa parte degli angoli interni del triangolo $BNC$, pertanto

$$P\hat{N}M \equiv M\hat{L}R \equiv R\hat{Q}P = \pi - 2\alpha$$




$\pi - 2(\alpha + \beta) \neq \pi - 2\alpha$ *essendo*

$\alpha \neq 0 \ \cap \beta \neq 0$

*Osservazione*

*Se fosse* $\alpha = 0 \ \cap \beta = 60°$ *la costruzione restituirebbe il triangolo ABC*

*Se fosse* $\beta = 0 \cap \alpha = 30°$, *le 6 semirette uscenti dai vertici di ABC si incontrerebbero nel punto G, baricentro*

- **Congiungendo i vertici $P, R, M$ l'esagono viene suddiviso nel triangolo equilatero $PRM$ e tre triangoli isosceli tra loro congruenti**

Dimostrazione: ruotando attorno a $G$ di $120°$ o di $240°$ si ottiene una permutazione dei vertici che muta il triangolo in se stesso (lo stesso accade per il triangolo $LNQ$).

Nella stessa rotazione ciascuno dei 3 triangoli isosceli si sovrappone a uno degli altri 2

**Rapporto tra l'area dell'esagono e l'area del triangolo $ABC$**

- I due triangoli equilateri $PRM$ e $ABC$ si corrispondono in un'omotetia di centro $G$ il cui rapporto è $k = \frac{\overline{GR}}{\overline{GA}}$

*$G$ è il baricentro comune e divide ciascuna altezza in due parti una doppia dell'altra*

$$\boldsymbol{\overline{GA} = \frac{2}{3}\overline{AH}} \qquad \boldsymbol{\overline{GR} = \overline{GA} - \overline{RA} = \frac{2}{3}\overline{AH} - \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{6}\overline{AH}}$$

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{6}\overline{AH} \cdot \frac{3}{2}\frac{1}{\overline{AH}} = \frac{1}{4}}$$

Pertanto, $\boldsymbol{\overline{MP} = \frac{1}{4}\overline{BC}} \rightarrow$ **Area triangolo $PRM = \frac{1}{16}$ dell'area triangolo ABC**

- I due triangoli isosceli $MPN$ e $BNC$ si corrispondono in un'omotetia inversa di centro $N$ il cui rapporto è $k_1 = -\frac{\overline{MP}}{\overline{BC}} = -\frac{1}{4}$

Pertanto, indicando con $NK$ l'altezza del triangolo $MPN$

$\overline{KN} = \frac{1}{4}\,\overline{NH}$ →Area triangolo $MPN=\mathbf{\frac{1}{16}}\ dell'area\ triangolo\ BNC$

Essendo $area\ BNC = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\ \cdot \overline{NH}$

$\boldsymbol{\overline{NH}} = \overline{AH} - \overline{AN} = \overline{AH} - (\overline{AR} + \overline{RK} + \overline{KN}) = \overline{AH} - \left(\frac{1}{2}\overline{AH} + \frac{1}{4}\overline{AH} + \frac{1}{4}\,\overline{NH}\right) =$
$\mathbf{\frac{1}{4}\overline{AH} - \frac{1}{4}\,\overline{NH}}$

$\frac{5}{4}\overline{NH} = \frac{1}{4}\overline{AH} \rightarrow \overline{NH} = \frac{1}{5}\overline{AH}$

$$area\ BNC = \frac{1}{5}\,\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{5}\ dell'area\ triangolo\ ABC$$

$$\boldsymbol{area\ MPN} = \mathbf{\frac{1}{16}}\ area\ BNC = \mathbf{\frac{1}{80}}\ \boldsymbol{area\ ABC}$$

**Area esagono** $LMNPQR = \left(\mathbf{\frac{1}{16}} + \mathbf{\frac{3}{80}} = \mathbf{\frac{8}{80}} = \mathbf{\frac{1}{10}}\right)\ dell'area\ triangolo\ ABC$