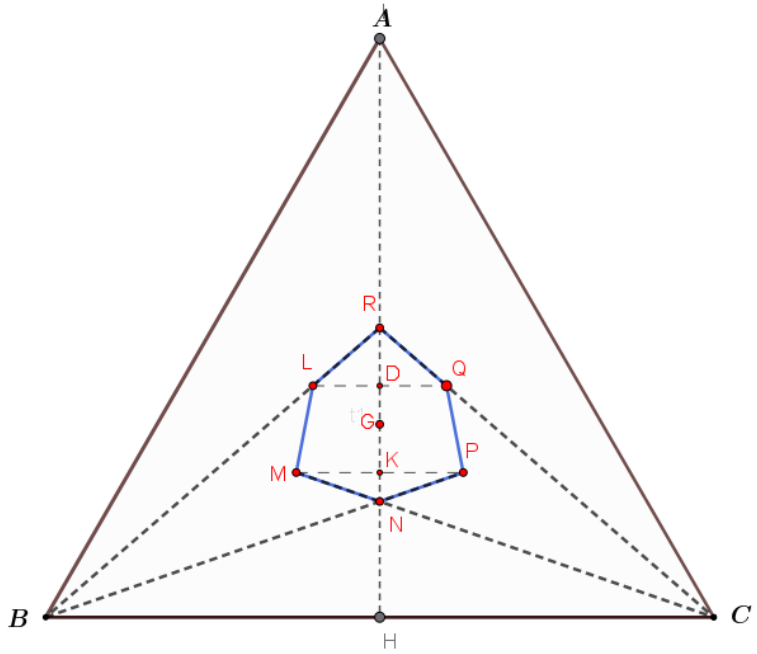
Punto b

Ammesso che l'area di tale esagono sia: $\frac{9}{10}h^2\sqrt{3}$, dove h è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del solido generato dall'esagono quando ruota di mezzo giro intorno alla retta NR.



Se l'area dell'esagono è uguale a $\frac{9}{10}h^2\sqrt{3}$, dove h è una lunghezza assegnata, , l'area del triangolo ABC è uguale a $9h^2\sqrt{3}$, il suo lato ha lunghezza $\overline{BC} = 6h$ e la sua altezza $\overline{AH} = 3h\sqrt{3}$.

L'esagono può essere suddiviso in 3 poligoni: il triangolo isoscele RLQ di altezza RD, il trapezio isoscele $LMPQ$ di altezza DK, il triangolo isoscele MNP di altezza NK.
La retta AH divide l'esagono in 2 quadrilateri tra loro congruenti

Per determinare il volume richiesto è necessario conoscere:

- $\overline{LD} = \frac{3}{5}h$
- $\overline{RD} = \frac{3}{10}\sqrt{3}\,h$
- $\overline{DK} = \frac{9}{20}\sqrt{3}\,h$
- $\overline{MK} = \frac{3}{4}h$
- $\overline{NK} = \frac{3}{20}\sqrt{3}h$

Possiamo assegnare una misura anche ad altri segmenti coinvolti nella soluzione del punto a).

Il lato $\boldsymbol{MP}$ del triangolo equilatero RMP ha lunghezza uguale a $\boldsymbol{\overline{MP}} = \frac{1}{4}\,\overline{BC} = \boldsymbol{\frac{3}{2}h}$

L'altezza RK ha lunghezza uguale a $\overline{RK} = \frac{1}{2}\overline{MP}\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,h$

Il segmento $\boldsymbol{KH}$ ha lunghezza uguale a

$\boldsymbol{\overline{KH}} = \overline{AH} - (\overline{AR}+\overline{RK}) = \overline{AH} - \left(\frac{1}{2}\overline{AH} + \frac{1}{2}\overline{MP}\cdot\sqrt{3}\right) = 3\,\sqrt{3}\,h - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,h - \frac{3}{4}\sqrt{3}\,h =$
$\sqrt{3}\frac{12-6-3}{4}h = \boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{3}\,h}$

L'altezza NK del triangolo MNP ha lunghezza $\boldsymbol{\overline{NK}} = \frac{1}{5}\overline{KH} = \boldsymbol{\frac{3}{20}\sqrt{3}h}$

Il solido generato dalla rotazione di mezzo giro dell'esagono $LMNPQR$ intorno alla retta NR è costituito dall'unione di un tronco di cono e due coni aventi in comune con esso la base minore e la base maggiore, rispettivamente.

Infatti

- il triangolo rettangolo RLD, col suo simmetrico rispetto all'asse di rotazione, genera il cono di vertice R, raggio LD e altezza RD
- il trapezio rettangolo $LMKD$, col suo simmetrico rispetto all'asse di rotazione, genera il tronco di cono di altezza DK, raggio minore LD e raggio maggiore MK
- il triangolo rettangolo MNK, col suo simmetrico rispetto all'asse di rotazione, genera il cono di vertice N, raggio MK e altezza NK

$$V_{solido} = \frac{1}{3}\pi\overline{LD}^2\cdot\overline{RD} + \frac{1}{3}\pi\cdot\overline{DK}\cdot(\overline{LD}^2 + \overline{MK}^2 + \overline{LD}\cdot\overline{MK}) + \frac{1}{3}\pi\overline{MK}^2\cdot\overline{NK}$$

Del cono di vertice *N* sono note le misure del raggio $\overline{MK} = \frac{1}{2}\,\overline{MP}$ **e dell'altezza** $\overline{NK}$

$$\boldsymbol{V_N} = \frac{1}{3}\pi\overline{MK}^2\cdot\overline{NK} = \frac{1}{3}\pi\frac{9}{16}\cdot\frac{3}{20}\sqrt{3}h^3 = \boldsymbol{\frac{9}{320}\pi\cdot\sqrt{3}h^3}$$

Per il calcolo degli altri due volumi è necessario determinare le misure dei segmenti

$$LD, RD, DK$$

Calcolo di $\boldsymbol{\overline{LD}}$ e di $\boldsymbol{\overline{RD}}$

Per la similitudine dei due triangoli $RDL\ e\ RHB$ possiamo scrivere

$\frac{\overline{RD}}{\overline{RH}} = \frac{\overline{LD}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{RL}}{\overline{RB}} = \frac{1}{5}$ come si ottiene eseguendo i calcoli seguenti

- $\overline{RL} = \overline{NM} = \sqrt{\overline{MK}^2 + \overline{NK}^2} = h\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{400}} = \frac{3}{10}\sqrt{7}\ h$

  essendo $\overline{BH} = 3h \quad \overline{RH} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ h$
- $\overline{RB} = \sqrt{\overline{RH}^2 + BH^2} = h\sqrt{\frac{27}{4} + 9} = h\sqrt{\frac{63}{100}} = \frac{3}{2}\sqrt{7}\ h$

  Si ottiene , essendo $\frac{\overline{RL}}{\overline{RB}} = \frac{3}{10}\sqrt{7} \cdot \frac{2}{3\sqrt{7}} = \frac{1}{5}$
- $\overline{RD} = \frac{1}{5} \cdot \overline{RH} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}\ h = \frac{3}{10}\sqrt{3}\ h$
- $\overline{LD} = \frac{1}{5} \cdot \overline{BH} = \frac{1}{5} \cdot 3\ h = \frac{3}{5}\ h$
- $\overline{DK} = \overline{RK} - \overline{RD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}h - \frac{3}{10}\sqrt{3}\ h = \frac{18}{40}\sqrt{3}\ h = \frac{9}{20}\sqrt{3}\ h$

Calcolo del volume del solido di rotazione

Volume del cono di vertice R: $\frac{1}{3}\pi\overline{LD}^2 \cdot \overline{RD}$

$$V_R = \frac{1}{3}\pi\frac{9}{25} \cdot \frac{3}{10}\sqrt{3}\ h^3 = \frac{9}{250}\sqrt{3}\,\pi\,h^3$$

Volume del tronco di cono: $\frac{1}{3}\pi \cdot \overline{DK} \cdot (\overline{LD}^2 + \overline{MK}^2 + \overline{LD} \cdot \overline{MK}) =$

$$V_{tc} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{20}\sqrt{3}\left(\frac{9}{25} + \frac{9}{16} + \frac{9}{20}\right)h^3 = \frac{1647}{8000}\sqrt{3}\ \boldsymbol{h^3}$$

Volume del cono di vertice N: $\frac{1}{3}\pi\overline{MK}^2 \cdot \overline{NK} \rightarrow V_N = = \frac{1}{3}\pi\frac{9}{16} \cdot \frac{3}{20}\sqrt{3}h^3 =$

$$\frac{9}{320}\boldsymbol{\pi \cdot \sqrt{3}h^3}$$

$$V_{solido} = \frac{9}{250}\sqrt{3}\,\pi\,h^3 + \frac{1647}{8000}\sqrt{3}\ h^3 + \frac{9}{320}\pi \cdot \sqrt{3}h^3 = \frac{27}{100}\sqrt{3}\,\pi\,h^3$$

Punto c

c) Supponendo nota la formula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ che fornisce il volume di un solido di rotazione, dimostrare le formule dei volumi di un cono e di un tronco di cono circolari retti.

Le formule dei volumi di un cono e di un tronco di cono circolari retti, note dalla geometria elementare e applicate nel punto b, sono

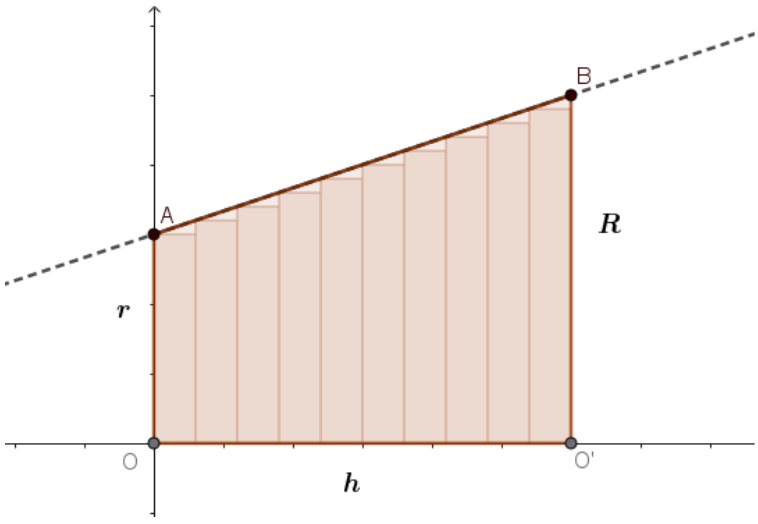
$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ *dove R è la misura del raggio e h la misura dell'altezza*

$V_{tronco\ di\ cono} = V = \frac{1}{3}\, h\left(\pi r^2 + \pi R^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi R^2}\right) = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + R \cdot r)$ *Il volume del tronco di cono è uguale alla terza parte de prodotto della misura dell'altezza per la somma dell'area della base minore , della base maggiore e della loro media geometrica*

- E' sufficiente dimostrare la formula del volume del tronco di cono di raggio minore r e raggio maggiore R. Il volume del cono si ottiene come caso particolare ponendo $r = 0$.

La formula assegnata nel testo si riferisce alla rotazione di un trapezoide delimitato dal grafico di una funzione continua $f(x)$, dall'asse x e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$.

In un riferimento cartesiano Oxy, consideriamo la retta passante per i punti $A(0, r)$ *e* $B(h, R)$, appartenenti alla retta di equazione $y = mx + r$ con $m = \frac{R-r}{h}$



Suddiviso l'intervallo $[0, h]$ *in un certo numero n di sotto intervalli* Δx_i*, si può suddividere il trapezoide (in questo caso un trapezio) in* n *rettangoli di base* Δx_i *e altezza* $f(c_i)$*, essendo* c_i *un punto interno all'intervallo* Δx_i.

In una rotazione completa intorno all''asse x , ciascun rettangolo descrive un cilindro di volume $\pi[f(c_i)]^2\Delta x_i$.

La somma $\sum_i^n \pi[f(c_i)]^2\Delta x_i$ *approssima il volume del solido ottenuto dalla rotazione del trapezoide intorno all'asse* x *(Somma di Riemann)*

Il limite $\lim_{n\to+\infty} \sum_1^n \pi[f(c_i)]^2\Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ *fornisce il valore del volume richiesto*

Calcolo del volume del tronco di cono

$$V = \pi \cdot \int_0^h (mx + r)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{(mx+r)^3}{3m}\right]_0^h =$$

$$\pi \cdot \frac{1}{3m}(m^3h^3 + 3m^2h^2r + 3mhr^2 + r^3 - r^3) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h[m^2h^2 + 3mhr + 3r^2] = \frac{1}{3}\pi h\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 h^2 + 3\frac{R-r}{h}\, rh + 3r^2\right] =$$

$$\frac{1}{3}\pi h(R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr - 3r^2 + 3r^2) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + R \cdot r)}$$

Volume del cono $(\boldsymbol{r = 0})$

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$$