I numeri reali – parte seconda

di Antonino Giambò

1. Riprendo a trattare dei numeri reali per rispondere alle domande che sono rimaste inevase nella prima parte di questo argomento e che riporto qui per comodità:

- come si procede all'atto pratico con l'addizione e la moltiplicazione di due numeri reali?
- come sono definite le operazioni sottrazione e divisione di due numeri reali?
- come l'introduzione dei numeri reali fornisce le risposte alle domande poste all'inizio, che non trovano soluzione operando con i soli numeri razionali?
- se si opera in $\mathbb{R}$ così come abbiamo operato in $\mathbb{Q}$ si ottiene forse un nuovo tipo di numeri?

Ma prima di tutto si rende necessario introdurre alcune nozioni preliminari che saranno utilizzate nelle dimostrazioni che seguiranno.

2. Incominciamo col prendere in considerazione il seguente allineamento decimale illimitato:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots ,$$

dove a_0 è un numero naturale qualunque, mentre gli altri a_k $(k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ sono numeri naturali compresi fra 0 e 9, estremi inclusi.

Costruiamo l'insieme A dei suoi valori approssimati per difetto a meno di

$$10^0,\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3},\ \dots\ ,\ 10^{-n}, \dots .$$

Va a dire:

$$A = \{a_0;\ \ a_0, a_1;\ \ a_0, a_1 a_2;\ \ a_0, a_1 a_2 a_3;\ \dots\ ;\ \ a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n;\ \dots\} .$$

Costruiamo pure l'insieme B dei suoi valori approssimati per eccesso degli stessi ordini:

$$B = \{b_0;\ \ b_0, b_1;\ \ b_0, b_1 b_2;\ \ b_0, b_1 b_2 b_3;\ \dots\ ;\ \ b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n;\ \dots\} ,$$

dove l'ultima cifra di ogni elemento è ottenuta aumentando di una quantità w l'ultima cifra dell'elemento dello stesso ordine dell'insieme A.

Per esempio, se si prende un numero di A, troncato all'n-esima cifra decimale, cioè $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, il corrispondente in B è il numero $b = a + w \cdot 10^{-n}$.

Di norma si prende $w = 1$, ma a volte anche un valore maggiore di 1.

In un caso concreto, posto che si abbia il seguente allineamento decimale illimitato:

$$2{,}645751311 \dots,$$

e che sia stato fissato $w = 1$, i due insiemi A, B sono i seguenti:

$$A = \{2;\ \ 2{,}6;\ \ 2{,}64;\ \ 2{,}645;\ \ 2{,}6457;\ \ 2.64575;\ \dots\} ,$$
$$B = \{3;\ \ 2{,}7;\ \ 2{,}65;\ \ 2{,}646;\ \ 2{,}6458;\ \ 2.64576;\ \dots\} .$$

Vale il seguente teorema:

TEOREMA. L'insieme A dei valori approssimati per difetto di un allineamento decimale illimitato e l'insieme B dei valori approssimati per eccesso formano una coppia di classi contigue di numeri razionali.

DIMOSTRAZIONE.

Siano A, B i due insiemi descritti sopra.

Che si tratti di insiemi di numeri razionali è del tutto evidente. Bisogna far vedere che sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

- ogni $a \in A$ è minore di ogni $b \in B$;
- per ogni razionale positivo h, esiste $\bar{a} \in A$ ed esiste $\bar{b} \in B$ tali che $\bar{b} - \bar{a} < h$.

Ora, la prima condizione si spiega facilmente se si tiene presente la costruzione di B descritta sopra.

Manca di dimostrare la seconda condizione.

Osserviamo anzitutto che, per ogni scelta di h, esiste almeno una potenza di 10 tale che $w \cdot 10^{-n} < h$.

Indichiamo ora con $\bar{a}$ il numero di A troncato all'n-esima cifra decimale (approssimazione per difetto), e sia $\bar{b} = \bar{a} + w \cdot 10^{-n}$ (approssimazione per eccesso), per cui $\bar{b} \in B$.

Dunque si ha:

$$\bar{b} - \bar{a} = (\bar{a} + w \cdot 10^{-n}) - \bar{a} = w \cdot 10^{-n} ,$$

pertanto, essendo $w \cdot 10^{-n} < h$, risulta: $\bar{b} - \bar{a} < h$.

In conclusione, la coppia (A, B) è una coppia di classi contigue di numeri razionali.

Individua perciò un numero reale, esattamente α.

NOTA 1. Si evince, da quanto precede, che ogni allineamento decimale illimitato è un numero reale.

Precisamente, se l'allineamento è illimitato non periodico il numero corrispondente è un numero irrazionale.

Sappiamo invece che, se l'allineamento decimale è periodico, il numero corrispondente è un numero razionale.

3. Forniamo adesso un cenno di risposta al primo degli interrogativi proposti per mezzo di un esempio.

Dati i due numeri reali $\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}$, mediante uno strumento di calcolo automatico si trova:

$$\sqrt{5} + \sqrt{2} = 3{,}650281539 \ldots \ , \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 3{,}162277660 \ldots \ .$$

Se, tuttavia, fossero assegnati i due allineamenti decimali seguenti (che sono i valori approssimati di $\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}$ rispettivamente):

$$\alpha = 2{,}236067977 \ldots \ , \quad \beta = 1{,}414213562 \ldots \ ,$$

ma senza sapere che si riferiscono ai due radicali, come si fa a calcolarne la somma e il prodotto?

La risposta è immediata, ma non altrettanto immediato è il procedimento.

Si costruiscono anzitutto i valori approssimati per difetto e per eccesso dei due numeri:

$$\alpha: \begin{cases} 2; \ 2{,}2; \ 2{,}23; \ 2{,}236; \ 2{,}2360; \ 2{,}23606; \ 2{,}236067; \ 2{,}2360679; \ \ldots \\ 3; \ 2{,}3; \ 2{,}24; \ 2{,}237; \ 2{,}2361; \ 2{,}23607; \ 2{,}236068; \ 2{,}2360680; \ \ldots \end{cases}$$

$$\beta: \begin{cases} 1; \ 1{,}4; \ 1{,}41; \ 1{,}414; \ 1{,}4142; \ 1{,}41421; \ 1{,}414213; \ 1{,}4142135; \ \ldots \\ 2; \ 1{,}5; \ 1{,}42; \ 1{,}415; \ 1{,}4143; \ 1{,}41422; \ 1{,}414214; \ 1{,}4142136; \ \ldots \end{cases}$$

Si considerano quindi i due insiemi seguenti:

- A_1 formato dai valori approssimati per difetto del numero α e A_2 formato dai suoi valori approssimati per eccesso:
- B_1 formato dai valori approssimati per difetto del numero β e B_2 formato dai suoi valori approssimati per eccesso.

Per il teorema suddetto, le coppie (A_1, A_2) e (B_1, B_2) sono coppie di classi contigue di numeri razionali e ciascuna di esse individua perciò un numero reale, α la prima coppia, β la seconda [1].

A questo punto, se si richiede la somma o il prodotto dei due numeri si costruiscono le successioni dei valori approssimati, sia per difetto sia per eccesso, sommando o, rispettivamente, moltiplicando i valori approssimati dello stesso ordine dei due numeri. Per esempio, l'approssimazione per difetto a meno di una unità di somma e prodotto dei due numeri sono rispettivamente: $2+1=3$ e $2 \cdot 1=2$; quelle approssimate per eccesso sono $3+2=5$ e $3 \cdot 2=6$.

Ecco, dunque, i valori approssimati per difetto di $\alpha + \beta$ e di $\alpha\,\beta$ e le relative conclusioni:

$$\alpha + \beta: \begin{cases} 3; \ 3{,}6; \ 3{,}64; \ 3{,}650; \ 3{,}6502; \ 3{,}65027; \ 3{,}650280; \ 3{,}6502814; \ \ldots \\ 5; \ 3{,}8; \ 3{,}66; \ 3{,}652; \ 3{,}6504; \ 3{,}65029; \ 3{,}650282; \ 3{,}6502816; \ \ldots \end{cases}$$

Siccome risulta $3{,}6502814 < \alpha+\beta < 3{,}6502816$, l'allineamento decimale che approssima $\alpha+\beta$, perlomeno fino alla 6ª cifra decimale, è certamente $3{,}650281$. Pertanto:

$$\alpha+\beta = 3{,}650281\ldots \ .$$

In modo analogo si opera riguardo al prodotto:

$$\alpha\,\beta = \begin{cases} 2; \ 3{,}0; \ 3{,}14; \ 3{,}161; \ 3{,}1621; \ 3{,}16225; \ 3{,}162275; \ 3{,}1622776; \ \ldots \\ 6; \ 3{,}4; \ 3{,}18; \ 3{,}165; \ 3{,}1625; \ 3{,}16229; \ 3{,}162278; \ 3{,}1622777; \ \ldots \end{cases}$$

Perciò, siccome $3{,}1622776 < \alpha\,\beta < 3{,}1622777$, l'allineamento decimale che approssima $\alpha\,\beta$, almeno fino alla 6ª cifra decimale, è certamente $3{,}162277$. Pertanto:

---

[1] AVVERTENZA. Nel seguito daremo per acquisito, senza precisarlo di volta in volta, il fatto che una coppia (A,B), formata dai valori approssimati per difetto e da quelli approssimati per eccesso di un dato allineamento decimale illimitato, sia una coppia di classi contigue di numeri razionali.

$$\alpha\,\beta = 3{,}162277\ldots\,.$$

4. Per definire le operazioni di sottrazione e divisione, pur con qualche complicazione in più al fine di determinare le successioni dei valori approssimati, le cose non vanno molto diversamente dalle operazioni addizione e moltiplicazione.

Per esempio, con riferimento ai numeri α e β, considerati sopra, e con approssimazione fino alla sesta cifra decimale, si trova:

$$\alpha - \beta = 0{,}821854\ldots\,; \quad \alpha : \beta = 1{,}581138\ldots\,.$$

Questi risultati sono stati ottenuti calcolando $\sqrt{5}$-$\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}/\sqrt{2}$ mediante uno strumento di calcolo automatico.

Vogliamo però capire come si giunge a questi risultati senza utilizzare il calcolo automatico, almeno per un calcolo diretto.

- Incominciamo con la ***differenza***, risultato dell'operazione **sottrazione**.

Anzitutto qualche nozione preliminare.

Dato un insieme numerico $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, indichiamo con $-A$ l'insieme numerico che si ottiene da A cambiando di segno i suoi elementi, ossia: $-A = \{-a_1, -a_2, -a_3, \ldots\}$.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA. Dato il numero reale α, definito dalla coppia di classi contigue di numeri razionali (A_1, A_2), anche la coppia $(-A_2, -A_1)$ è una coppia di classi contigue di numeri razionali.

DIMOSTRAZIONE.
Siccome (A_1, A_2) è una coppia di classi contigue di numeri razionali, si ha che:
$a_1 < a_2$ per ogni $a_1 \in A_1$ e per ogni $a_2 \in A_2$,
inoltre, $\forall\, h \in \mathbb{Q}_0^+$ esistono $\bar{a}_1 \in A_1$ e $\bar{a}_2 \in A_2$ tali che $\bar{a}_2 - \bar{a}_1 < h$.
Di conseguenza: $-a_2 < -a_1$ e inoltre $(-\bar{a}_1) - (-\bar{a}_2) < h$.
Dunque, anche la coppia $(-A_2, -A_1)$ è una coppia di classi contigue di numeri razionali.

Essa definisce pertanto un nuovo numero reale, il quale è denominato ***opposto*** di α e si indica con $-\alpha$.

Ebbene, si definisce ***differenza*** di due numeri reali $\alpha=[A_1, A_2]$ e $\beta=[B_1, B_2]$ quel numero reale, indicato con $\alpha - \beta$, ottenuto sommando ad α l'opposto di β, vale a dire:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = [A_1, A_2] + [-B_2, -B_1]\,.$$

Per un esempio concreto, riprendiamo i due numeri reali considerati sopra, vale a dire:

$$\alpha: \begin{cases} 2;\ 2{,}2;\ 2{,}23;\ 2{,}236;\ 2{,}2360;\ 2{,}23606;\ 2{,}236067;\ 2{,}2360679;\ \ldots \\ 3;\ 2{,}3;\ 2{,}24;\ 2{,}237;\ 2{,}2361;\ 2{,}23607;\ 2{,}236068;\ 2{,}2360680;\ \ldots \end{cases}$$

$$\beta: \begin{cases} 1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ 1{,}4142135;\ \ldots \\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ 1{,}4142136;\ \ldots \end{cases}$$

Troviamo anzitutto le due successioni che approssimano $-\beta$.

$$-\beta: \begin{cases} -2;\ -1{,}5;\ -1{,}42;\ -1{,}415;\ -1{,}4143;\ -1{,}41422;\ -1{,}414214;\ -1{,}4142136;\ \ldots \\ -1;\ -1{,}4;\ -1{,}41;\ -1{,}414;\ -1{,}4142;\ -1{,}41421;\ -1{,}414213;\ -1{,}4142135;\ \ldots. \end{cases}$$

Pertanto:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta): \begin{cases} 0;\ 0{,}7;\ 0{,}81;\ 0{,}821;\ 0{,}8217;\ 0{,}82184;\ 0{,}821853;\ 0{,}8218543;\ \ldots \\ 3;\ 0{,}9;\ 0{,}83;\ 0{,}823;\ 0{,}8219;\ 0{,}82186;\ 0{,}821855;\ 0{,}8218545;\ \ldots \end{cases}$$

Siccome $0{,}8218543 < \alpha - \beta < 0{,}8218545$, l'allineamento decimale che approssima $\alpha - \beta$, almeno fino alla 6ª cifra decimale, è certamente $0{,}821854$. Pertanto:

$$\alpha - \beta = 0{,}821854\ldots\,.$$

- Passiamo al ***quoziente***, risultato dell'operazione **divisione**.

Ancora qualche nozione preliminare.

Dato un insieme numerico $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, che supponiamo formato da numeri positivi, indichiamo con $\frac{1}{A}$ (o anche $1/A$) l'insieme numerico che si ottiene da A considerando i reciproci dei suoi elementi, ossia:

$$\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \dots\right\}.$$

Vale il seguente teorema.

TEOREMA. Dato il numero reale positivo α, definito dalla coppia di classi contigue di numeri razionali (A_1, A_2), tali però che l'insieme A_1 sia costituito da numeri positivi, anche la coppia $(1/A_2, 1/A_1)$ è una coppia di classi contigue di numeri razionali.

DIMOSTRAZIONE.

Siccome (A_1, A_2) è una coppia di classi contigue di numeri razionali, si ha che:

$a_1 < a_2$ per ogni $a_1 \in A_1$ e per ogni $a_2 \in A_2$,

inoltre, $\forall\, h \in \mathbb{Q}_0^+$ esistono $\bar{a}_1 \in A_1$ e $\bar{a}_2 \in A_2$ tali che $\bar{a}_2 - \bar{a}_1 < h$.

Di conseguenza:

$$\frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_1} \text{ e inoltre, } \frac{1}{\bar{a}_1} - \frac{1}{\bar{a}_2} < k,$$

dove k è un numero razionale positivo qualunque.

Ora, mentre la prima di queste due condizioni è evidente, la seconda richiede una spiegazione.

Orbene, si costata anzitutto che si ha:

$$\frac{1}{\bar{a}_1} - \frac{1}{\bar{a}_2} = \frac{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}{\bar{a}_1 \bar{a}_2} < \frac{h}{\bar{a}_1 \bar{a}_2}.$$

Basta porre dunque $k = \frac{h}{\bar{a}_1 \bar{a}_2}$ perché, essendo h un numero razionale positivo arbitrario, anche k lo sia.

La classe $(1/A_2, 1/A_1)$ definisce quindi un nuovo numero reale, il quale è chiamato ***inverso*** (o ***reciproco***) di α e si indica con $\frac{1}{\alpha}$.

Ebbene, si definisce ***quoziente*** di due numeri reali $\alpha=[A_1, A_2]$ e $\beta=[B_1, B_2]$, entrambi positivi, quel numero reale, indicato con $\frac{\alpha}{\beta}$, ottenuto moltiplicando α per l'inverso di β, vale a dire:

$$\alpha = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = [A_1, A_2] \cdot \left[\frac{1}{B_2},\ \frac{1}{B_1}\right].$$

Per un esempio concreto, riprendiamo ancora una volta i due numeri reali considerati sopra, e troviamo anzitutto le due successioni che approssimano $\frac{1}{\beta}$.

$$\frac{1}{\beta}: \begin{cases} 0; & 0{,}6; & 0{,}70; & 0{,}706; & 0{,}7070; & 0{,}70710; & 0{,}707106; & 0{,}7071067; & \dots \\ 1; & 0{,}7; & 0{,}71; & 0{,}707; & 0{,}7071; & 0{,}70710; & 0{,}707107; & 0{,}7071068; & \dots \end{cases}$$

Pertanto:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}: \begin{cases} 0; & 1{,}3; & 1{,}56; & 1{,}578; & 1{,}5808; & 1{,}58111; & 1{,}581136; & 1{,}5811385; & \dots \\ 3; & 1{,}6; & 1{,}56; & 1{,}581; & 1{,}5811; & 1{,}58112; & 1{,}581139; & 1{,}5811388; & \dots \end{cases}$$

Siccome $1{,}5811385 < \frac{\alpha}{\beta} < 1{,}5811388$, l'allineamento decimale che approssima $\frac{\alpha}{\beta}$, almeno fino alla 6ª cifra decimale, è certamente $1{,}581138$. Pertanto:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1{,}581138\dots .$$

AVVERTENZA. Nella divisione di due numeri reali abbiamo supposto che entrambi i numeri fossero positivi. Se almeno uno di essi è negativo, valgono le seguenti definizioni:

- se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ allora si ha $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha}{|\beta|}$;
- se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ allora si ha $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{|\alpha|}{\beta}$;
- se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ allora si ha $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

NOTA 2. Abbiamo descritto accuratamente come si opera con i numeri reali quando sono assegnati sotto forma di allineamenti decimali illimitati. E sembrerebbe, per lo meno dagli esempi forniti, di poter dire che, per ottenere un'approssimazione per difetto di ordine n del risultato di una qualsiasi delle 4 operazioni, sia sufficiente operare con l'approssimazione per difetto di ordine n+1 dei termini dell'operazione.

Ma non sempre è così. Lo è sempre in effetti per l'addizione e la sottrazione, ma non sempre lo è per la moltiplicazione e la divisione.

In realtà, si dimostrano precise regole riguardanti il legame fra le approssimazioni dei numeri assegnati e quelle dei risultati delle diverse operazioni, in particolare: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione.

Non ce ne occupiamo in questa sede.

5. Vediamo adesso come sia possibile dar soluzione agli interrogativi proposti in apertura dell'altro articolo circa l'impossibilità di risolverli disponendo del solo insieme dei numeri razionali.

- Che l'allineamento $\alpha = 2{,}1010010001000001\ldots$. sia un numero reale, e precisamente un numero irrazionale, è, di fatto, spiegato all'inizio di questo articolo (Nota 1), trattandosi di un caso particolare del caso generale ivi descritto.

Ragion per cui non ce ne occupiamo più e passiamo oltre.

- Un'altra questione irrisolta in $\mathbb{Q}$ è il fatto che non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2.

Vediamo come possiamo risolverla in $\mathbb{R}$.

Dobbiamo dunque trovare un oggetto x tale che sia $x^2=2$.

Determiniamo anzitutto due interi consecutivi, a ed $a_1=a+1$, tali che sia:

$$a^2 < 2 < a_1^2.$$

Troviamo subito $a=1$. Infatti: $1^2 < 2 < 2^2$. Quindi deve essere $1<x<2$.

Determiniamo adesso due numeri decimali del tipo 1,d ed $1,d_1$, dove d è una delle cifre comprese fra 0 e 9 e $d_1=d+1$, tali che:

$$1,d^2 < 2 < 1,d_1^2.$$

Dopo qualche tentativo, condotto magari con il supporto di una calcolatrice, si trova $d=4$. Infatti $1{,}4^2<2<1{,}5^2$. Quindi deve essere $1{,}4<x<1{,}5$.

Proseguiamo, determinando due numeri decimali del tipo 1,4d e $1{,}4d_2$, dove d è una delle cifre comprese fra 0 e 9 e $d_2=d+1$, tali che [2]:

$$1{,}4d^2 < 2 < 1{,}4d_2^2.$$

Dopo altri tentativi si trova $d=1$. Infatti $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$. Dunque $1{,}41<x<1{,}42$.

Continuando nella ricerca, si trova:

$1{,}414 < x < 1{,}415$
$1{,}4142 < x < 1{,}4143$
$1{,}41421 < x < 1{,}41422$
$1{,}414213 < x < 1{,}414214$
$1{,}4142136 < x < 1{,}4142137$
..... .

L'insieme $A = \{1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ 1{,}4142136; \ldots\}$ è l'insieme dei valori approssimati per difetto di x.

L'insieme $B = \{2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ 1{,}4142137; \ldots\}$ è l'insieme dei suoi valori approssimati per eccesso.

---

[2] ATTENZIONE! Qui la scrittura 1,4d e simili non deve essere interpretata come prodotto di 1,4 per d, ma d deve essere intesa come la seconda cifra decimale. Per esempio, se d=1 allora 1,4d=1,41.

Si sa che la coppia (A, B) è una coppia di classi contigue di numeri razionali. Individua perciò un numero reale, che è esattamente $\sqrt{2}$ ed è evidentemente un numero irrazionale.

- Ancora una questione non risolvibile in $\mathbb{Q}$: non è definito il rapporto di due grandezze incommensurabili.

Andiamo a vedere come questa questione viene risolta in $\mathbb{R}$.

Siano allora X ed Y due grandezze omogenee incommensurabili.

Cerchiamo quante volte Y è contenuta in X e supponiamo che vi sia contenuta a_0 volte ($a_0 \in \mathbb{N}$) e che avanzi una parte X_1<Y. Come dire che:

$$X = a_0 Y + X_1 .$$

Cerchiamo adesso quante volte la grandezza $\frac{1}{10}$Y è contenuta in X_1 e supponiamo che vi sia contenuta a_1 volte ($a_1 \in \mathbb{N}$, con a_1<10) e che avanzi una parte X_2 minore di $\frac{1}{10}$Y. Vale a dire:

$$X_1 = a_1\left(\frac{1}{10}\,Y\right) + X_2 , \text{ per cui: } X = \left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)Y + A_2 .$$

Cerchiamo di nuovo quante volte la grandezza $\frac{1}{100}$Y è contenuta in X_2 e supponiamo che vi sia contenuta a_2 volte ($a_2 \in \mathbb{N}$, con a_2<10) e che avanzi una parte X_3 minore di $\frac{1}{100}$Y. Vale a dire:

$$X_2 = a_2\left(\frac{1}{100}\,Y\right) + X_3 , \text{ per cui: } X = \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}\right)Y + X_3 .$$

Procedendo alla stessa maniera, con divisioni successive di Y, si ottiene:

$$X = \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right)Y + X_{n+1} ,$$

dove le a_k sono numeri naturali minori di 10.

Ora, la grandezza X_{n+1} non potrà mai essere nulla, poiché in tal caso X e Y avrebbero una sottomultipla comune e sarebbero perciò grandezze commensurabili, contro l'ipotesi che siano incommensurabili.

Ebbene, l'insieme:

$$A = \left\{a_0 ,\ a_0 + \frac{a_1}{10} ,\ \ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2},\ \ \ldots ,\ \ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} ,\ \ \ldots\right\}$$

è l'insieme dei valori approssimati per difetto di X/Y.

Invece, l'insieme:

$$B = \left\{a_0 + 1,\ a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} ,\ \ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2},\ \ \ldots ,\ \ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} ,\ \ \ldots\ldots\right\}$$

è l'insieme dei valori approssimati per eccesso di X/Y.

Come sopra, la coppia (A, B) è una coppia di classi contigue di numeri razionali. Individua perciò un numero reale, che evidentemente è un numero irrazionale ed è per l'appunto il rapporto X/Y.

Questo numero può essere indicato con il seguente allineamento decimale:

$$a_0 , a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots .$$

Per esempio, se X è la diagonale di un quadrato ed Y il lato, si ha:

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{2} = 1{,}4142137 \ldots .$$

In particolare, **se Y rappresenta l'unità di misura delle grandezze considerate, il rapporto X/Y esprime la *misura* di X**.

- Ad un'ultima questione non risolvibile in $\mathbb{Q}$ abbiamo accennato a suo tempo: l'impossibilità di far corrispondere ad ogni punto di una retta cartesiana un numero razionale.

Ce ne vogliamo occupare per vedere come la questione trovi soluzione in $\mathbb{R}$.

Stabilito allora su una retta r il riferimento (O,U) e considerato un qualsiasi numero reale α, associamogli il punto P della retta r in modo che $|\alpha|$ sia la misura del segmento OP rispetto all'unità di misura OU, con l'avvertenza di prendere P sulla semiretta aperta di origine O contenente U (semiretta positiva) se $\alpha > 0$ e sulla semiretta opposta (semiretta negativa) se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 0$ allora P coincide con O.

Ne scaturisce una funzione definita dall'insieme $\mathbb{R}$ nell'insieme dei punti della retta r. Esattamente come avviene con l'insieme $\mathbb{Q}$. Solo che adesso, cosa che non accade disponendo solamente dell'insieme $\mathbb{Q}$, la funzione è biettiva.

Infatti, preso un qualunque punto P di r, è determinato il numero reale α tale che $|\alpha|$ esprime la misura di OP rispetto ad OU, con $\alpha=0$ se P coincide con O, con $\alpha>0$ se P si trova sulla semiretta positiva, con $\alpha<0$ se P si trova sulla semiretta negativa.

Quindi, è stabilita una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei punti di una retta cartesiana. Per questo motivo, tale retta è spesso denominata *asse reale*.

NOTA 3. La retta cartesiana è dunque completamente riempita dai numeri reali, non ci sono vuoti. Questo significa che, se si vogliono costruire altri sistemi numerici, bisogna uscire dalla retta e servirsi di qualche altra figura geometrica.

Sappiamo, in realtà, che per una rappresentazione dei "numeri complessi" bisogna servirsi del piano di Gauss.

6. Dimostriamo infine che, operando in $\mathbb{R}$ come abbiamo operato in $\mathbb{Q}$, non si esce da $\mathbb{R}$, ossia non si ottiene un nuovo tipo di numeri. Cosa che peraltro s'intuisce, visto e considerato che i numeri reali ricoprono completamente la retta cartesiana.

Sia allora (A, B) una coppia ordinata di classi contigue di numeri reali.

Valgono perciò le seguenti condizioni, analoghe a quelle relative al caso in cui i numeri che formano la coppia sono razionali:

$\forall\, \alpha \in A$ e $\forall\, \beta \in B$, $\alpha < \beta$;

$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, cioè per ogni reale positivo ε, $\exists\, \bar{\alpha} \in A$ e $\exists\, \bar{\beta} \in B$ tali che $\bar{\beta} - \bar{\alpha} < \varepsilon$.

Un numero reale λ, come in $\mathbb{Q}$, si dice *elemento di separazione* di (A, B) se $\alpha \le \lambda \le \beta$, qualunque siano i numeri reali $\alpha \in A$ e $\beta \in B$.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA. **Ogni coppia ordinata (A,B) di classi contigue di numeri reali ammette uno ed un solo elemento di separazione.**

DIMOSTRAZIONE.

Con un ragionamento analogo a quello esposto a suo tempo (articolo precedente) riguardo ai numeri razionali e che pertanto non riproduciamo, si dimostra anzitutto che, se λ è elemento di separazione della coppia (A, B), allora è unico.

Resta da dimostrare perciò che l'elemento di separazione esiste.

Ora, se esiste $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ tale che $\alpha \le \bar{q} \le \beta$, qualunque siano i numeri reali $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, allora possiamo concludere che $\bar{q}$ è esattamente l'elemento di separazione cercato.

Supponiamo, al contrario, che nessun numero razionale soddisfi alla condizione di essere compreso tra qualche α e qualche β. Ragion per cui, preso un qualsiasi numero razionale q, si presentano due possibilità:

- q è minore o uguale a qualche $\alpha \in A$
- q è maggiore o uguale a qualche $\beta \in B$.

Diciamo allora H l'insieme dei numeri q rispondenti alla prima possibilità e K quello dei numeri q rispondenti alla seconda, vale a dire:

$$H = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, \bar{\alpha} \in A, q \le \bar{\alpha}\}, \quad K = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, \bar{\beta} \in B, q \ge \bar{\beta}\}.$$

Dimostriamo che (H, K) è una coppia di classi contigue di numeri razionali.

Per questo bisogna provare che:

$\forall\, h \in H$ e $\forall\, k \in K$, $h < k$;

$\forall\, d \in \mathbb{Q}_0^+$, cioè per ogni razionale positivo d, $\exists\, \bar{h} \in H$ e $\exists\, \bar{k} \in K$ tali che $\bar{k} - \bar{h} < d$.

La prima condizione è evidente.

Passiamo alla seconda. A questo proposito, scelto in H un qualunque numero r, consideriamo la seguente successione di numeri razionali:

$$r,\quad r + \frac{d}{2},\quad r + 2\cdot\frac{d}{2},\quad r + 3\cdot\frac{d}{2},\quad \dots,\quad r + n\cdot\frac{d}{2},\quad \dots .$$

Finiremo per ottenere un numero razionale, mettiamo che sia $\bar{k} = r + n\cdot\frac{d}{2}$, appartenente a K mentre il numero precedente, $\bar{h} = r + (n-1)\cdot\frac{d}{2}$, appartiene ancora ad H; e per questi due numeri è appunto: $\bar{k} - \bar{h} < d$.

La coppia (H, K) è, pertanto, una coppia di classi contigue di numeri razionali. Di conseguenza individua un numero reale λ, per il quale risulta $h \leq \lambda \leq k$, quali che siano i numeri $h \in H$ e $k \in K$.

Per la dimostrazione del teorema, resta da far vedere che si ha: $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, qualunque siano i numeri reali $\alpha \in A$ e $\beta \in B$.

Incominciamo a costatare che si ha $h < \beta$ e $k > \alpha$ per ogni $h \in H$, $k \in K$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$.

Ragioniamo ora per assurdo.

Se ogni $\alpha \in A$ non fosse minore o uguale a λ, allora esisterebbe $\bar{\alpha} \in A$ tale che $\bar{\alpha} > \lambda$. Ma questo è assurdo.

Infatti, siccome la coppia (H, K) è una coppia di classi contigue di numeri razionali, allora si ha che:

$\forall\, d \in \mathbb{Q}_0^+$, cioè per ogni razionale positivo d, $\exists\, \bar{h} \in H$ ed $\exists\, \bar{k} \in K$ tali che $\bar{k} - \bar{h} < d$.

Se ora scegliamo $d = \bar{\alpha} - \lambda$, allora si avrebbe:

$$\bar{k} - \bar{h} < \bar{\alpha} - \lambda \text{ e quindi } (\bar{k} - \bar{\alpha}) + \lambda < \bar{h}$$

e perciò, essendo $\bar{k} > \bar{\alpha}$, dovrebbe essere $\lambda < \bar{h}$. Conclusione assurda poiché sappiamo che ogni h è minore o uguale a λ. Quindi ogni $\alpha \in A$ è minore o uguale a λ.

Analogamente si dimostra che λ è minore o uguale ad ogni $\beta \in B$.

Insomma il numero reale λ è l'elemento di separazione della coppia (A, B) di classi contigue di numeri reali.

Possiamo concludere che, operando in $\mathbb{R}$ allo stesso modo che in $\mathbb{Q}$, non si esce da $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Armando Chiellini – Roberto Giannarelli, *L'esame orale di matematica nei concorsi a cattedre di scuole secondarie*, Roma, Libreria Eredi Virgilio Veschi, 1962, pag. pagg. 123-170.

[2] Antonino Giambò, *La prova di matematica nei concorsi di scuola media*, Torino, S.E.I., 1988, pagg. 110-127.

[3] Richard Spreckelmeyer, *I numeri reali*, traduzione di Domenico Costantini, Milano, Progresso Tecnico Editoriale, 1967.